Henri Poincaré

eg

știință și ipoteză

Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică

HENRI POINCARÉ

Știință și ipoteză

COLECȚIA „ENCICLOPEDIA GÎNDIRII"

HENRI POINCARÉ

Știință și ipoteză

Traducere din limba franceză
de **Constantin Popescu-Ulmu**

Cuvînt introductiv
de Acad. **Octav Onicescu**

EDITURA ȘTIINȚIFICĂ ȘI ENCICLOPEDICĂ
BUCUREȘTI — 1986

Coperta de DOINA DUMITRESCU

Un mare gînditor — Henri Poincaré

Un gînditor dominînd sfîrşitul veacului trecut şi începutul celui care se apropie de apus; proaspăt în idei necesare pentru înţelegerea marilor teorii fizice ale lui Faraday şi Maxwell, deschizător de perspective nebănuite pentru ideea de grup care frămînta în loc domenii ce începeau a fi epuizate în geometrie, reluînd principiile lor galoisiene, pentru a o aplica problemelor fundamentale de existenţă în teoriile privind ecuaţiile diferenţiale, prilej pentru el de a crea universul matematic al funcţiilor automorfe, care încoronau creaţiile matematice ale veacului trecut; promotor al ideii fundamentale de invariant integral, care angaja întreaga matematică în inovaţiile cele mai utile studiului naturii; aliat şi critic în aceeaşi vreme al ideilor matematice reformiste, fie ele ale contemporanilor săi francezi, fie ale logicii russeliene, fie ale teoriilor relativiste, care au găsit terenul pregătit de gîndurile sale, nu însă lipsite de acel rafinat şi uşor scepticism care face farmecul sănătos şi luminos al filosofiei sale.

Fiu de medic din Nancy, Henri Poincaré s-a născut în acel oraş la 29 aprilie 1854 şi a părăsit această existenţă la 17 iulie 1912. Mediul de înaltă spiritualitate în care şi-a trăit copilăria era, desigur, excepţional, cum excepţionale au fost şi îngrijirile de care s-a bucurat din partea mamei sale.

Cu o constituție fizică delicată, capacitățile sale de memorie și, în genere, de înțelegere l-au așezat de la început în primele rînduri ale colegilor săi. La 11 ani știa cum funcționează telegraful, știa să explice membrilor familiei sale legile ecoului. La 13 ani avea orientări politico-filosofice. A fundat, în grădina bunicilor săi, un guvern comun pentru trei națiuni, făcînd fiecăreia dintre acestea și o constituție, dar rezervîndu-și lui însuși rolul de diriguitor principal. A început a face și compoziții dramatice, cea dintîi despre Jeanne d'Arc, iar apoi cîte una, de fiecare reuniune, familiei. Bineînțeles că aceste activități nu impietau asupra obligațiilor sale de școlar, pe care le împlinea cu o facilitate ce uimea și familia și pe colegii săi.

Încet, încet interesul său pentru matematică s-a ridicat deasupra celorlalte, fără să-i împiedice însă activitatea în fiecare dintre celelalte științe, dovadă stînd, de pildă, bacalaureatul luat cu o lucrare în litere, completat mai tîrziu cu una în științe.

În timpul războiului cu Germania, Nancy fiind ocupat și de aceea fără informații în limba franceză, a învățat singur limba germană ca să poată citi gazetele respective.

În 1871 intră primul, prin concurs, la Școala Politehnică, după care urmează Școala de Mine (1875), dar își dă repede seama că rostul său principal este de a realiza progrese în domeniul matematicii.

Cea dintîi lucrare importantă a sa a fost marcată de teza de doctorat în matematică (1878) asupra integrării ecuațiilor cu derivate parțiale cu un număr oarecare de variabile independente. În această teză el tratează și problema delicată a funcțiilor cu spații lacunare și a funcțiilor algebroide. După doi ani de Conferință la Universitatea din Caen, este numit conferențiar de analiză matematică la Universitatea din Paris

(1881); în 1886 devine profesor de fizică matematică și calculul probabilităților, spații științifice în care rămîne pînă la sfîrșitul carierei sale într-un fel de domnie aproape universal recunoscută; un stăpîn absolut în domeniul matematicii și al principalelor sale aplicații în științele naturii. „Ce ne-am fi făcut noi, spunea cîndva Felix Klein, fără prezența lui Henri Poincaré în știința noastră?"

Una dintre lucrările de început cu răsunet în geometrie și fizica matematică a fost aceea privind soluțiile reale ale unei ecuații diferențiale reale, începînd chiar cu ecuații de ordinul întîi. El găsește pentru acestea din urmă mai întîi o clasificare a tipurilor de soluții, care dau noduri în care se întîlnesc nenumărate soluții, focare în jurul cărora se învîrte cîte o soluție, precum și puncte izolate dar închise în soluții înfășurîndu-se îndefinit una în alta și punctele izolate înseși. Dar cel mai important rezultat al acestui memoriu, care va servi multor matematicieni ca model și chiar lui însuși pentru lucrările de mai tîrziu, este problema celor trei corpuri.

Pe aceeași cale a problemei, mereu prezentă pentru matematicieni, a rezolvării ecuațiilor diferențiale liniare, Poincaré a fost condus la descoperirea și studiul adîncit al funcțiilor fuchsiene și kleineene. El a plecat de la cercetările lui Hermite și ale altora privind funcțiile eliptice și de la exemplul devenit clasic atunci al funcției modulare invariante pentru un grup de transformări liniare cu coeficienți întregi și cu determinant egal cu unitatea. A realizat mai întîi principiile care generează grupurile cele mai generale de transformări liniare și modul lor de formare, precum și modul de formare a funcțiilor invariante pentru un astfel de grup.

Numeroase sînt cercetările lui Poincaré în diversele probleme ale analizei sau ale teoriei numerelor. Fiecare dintre noi a întîlnit în aceste

domenii cel puțin o chestiune în care contribuția lui Poincaré a adus lumina care se cerea. Voi cita doar problema extensiunii teoremei lui Cauchy asupra reprezentării unei funcții de variabilă complexă prin celebra sa integrală. Trecerea la cazul mai general al funcțiilor de mai multe variabile a trebuit să aștepte pe Poincaré pentru a fi realizată printr-o integrală corespunzătoare.

Numele lui Henri Poincaré de matematician reprezentativ al ultimelor decenii ale secolului trecut a cunoscut o nouă strălucire cînd comisia compusă din R. Weierstrass, Ch. Hermite și Mittag-Leffler, aștrii matematicieni ai epocii, i-au conferit în 1889 premiul instituit de regele Suediei pentru Memoriul privind problema celor trei corpuri și ecuațiile dinamice. După părerea unuia dintre membrii Comisiei, acest Memoriu reprezenta una dintre cele mai importante descoperiri ale secolului și adăuga un nou factor de stimă pentru Poincaré din partea matematicienilor.

Fără ca această apreciere să schimbe ceva din activitatea febrilă a marelui om, el fiind în continuare stăpînit de demonul gravelor probleme care se deschideau mereu cercetării sale, Poincaré se dăruiește și învățămîntului fizicii matematice; auditorii săi îi publică cu înțeleasă grabă cursurile privind: Termodinamica, Teoria lui Maxwell și teoria electromagnetică a luminii, Teoriile lui Hertz și Helmholtz, Teoria elasticității, Studii noi asupra difracției cu teoria dispersiei a lui Helmholtz (redactate, între alții, de D. Hurmuzescu), Oscilațiile electrice, Teoria analitică a propagării căldurii, Calculul Probabilităților, Teoria potențialului newtonian, Lumina și teoriile electromagnetice (redactată, între alții, de Eugen Neculcea).

Aceste publicații conțineau o reluare fundamentală a tuturor marilor probleme ale fizicii matematice cu spiritul deschis spre noutate și, în același timp, foarte ascuțit din punct de ve-

dere critic, pe care Poincaré l-a demonstrat de-a lungul întregii sale vieți. Judecățile sale asupra operei unor precedesori, chiar dacă aceștia erau din același loc în care se născuse și Poincaré, nu sînt alterate de sentimente străine adevărului și progresului cunoașterii, ele fiind, în acest fel, adînc utile celor ce se apleacă asupra studiului lor.

Voi semnala din mulțimea lucrărilor abia numite, două dintre ele, pe care le-am cunoscut bine și care au avut urmări importante în ramurile științelor ce m-au interesat mai mult.

Este vorba mai întîi de lecțiile asupra operei lui Maxwell, operă căreia Poincaré, recunoscîndu-i importanța covîrșitoare în Fizica epocii, îi găsește un păcat fundamental în ceea ce privește expresia, care a făcut ca această operă să pătrundă greu pe continent și, prin aceasta, să întîrzie folosirea ei de către fizicienii continentali.

„Calculul probabilităților" este o operă nouă, explică întreaga tradiție instalată în știința creată de Bernoulli, Pascal, Laplace și Gauss (mă limitez la numele cele mai expresive), lămurește paradoxuri aparente ca acela al lui Bertrand, dar peste aceste aspecte tradiționale aduce, cu o prospețime impresionantă, lămuriri asupra conceptului de probabilitate, pe care îl încorporează definitiv în știința mare a matematicii deschisă asupra evenimentelor universului. Se poate afirma, pînă la un anume punct, că prin aceste lecții despre Probabilitate ale lui Poincaré — la care trebuie să se adauge și volumul ceva mai tîrziu al lui Castelnuovo — se încheie faza statistică a teoriei probabilităților, pentru o înțelegere mai pură, mai directă și mai adîncă a Probabilității, pe care ele o pregătesc.

Este imposibil ca în aceste cîteva pagini de început, în care trebuie să schițez în primul rînd figura științifică a lui Henri Poincaré, să insist asupra operei sale de director de conștiință al imensei activități în domeniul Fizicii care se

desfășura în deceniul de încheiere a secolului trecut și în cele care au marcat apariția teoriei cuantelor a lui Planck și, cu ea, pătrunderea în microcosm. De aceea sînt silit să trec, ca toți cei care urmăresc uriașa operă a lui Henri Poincaré, la prezentarea contribuției sale privind teoriile asupra universului în mare, și anume a lucrării „Metodele noi ale mecanicii cerești". Primele două volume au apărut în 1892 și 1893, iar ultimul în 1899. Această operă, reluată în primii ani ai secolului nostru, datorită și cursului de Mecanică cerească pe care îl ținea la Sorbona, a fost completată de două importante lucrări ale sale asupra Figurilor de echilibru ale maselor fluide și asupra Ipotezelor cosmogonice, care au hrănit curiozitatea tinerețelor noastre.

În „Metodele noi ale mecanicii cerești", Henri Poincaré introduce noțiuni matematice necesare pentru progresele acestei teorii, noțiuni care reprezintă mari cuceriri ale matematicii: noțiunea „ecuații ale variațiilor", adică ecuațiile liniare asociate local unor ecuații diferențiale date, și noțiunea „invariant integral", care, mai tîrziu, avea să aibă strălucita carieră pe care i-a asigurat-o opera lui Elie Cartan, și care ne-a condus și pe noi la crearea Mecanicii invariantive.

Trebuie să adăugăm, alături cu G. Darboux, căruia îi datorăm numeroase împrumuturi în această scurtă introducere la uriașa operă a lui H. Poincaré, folosirea cu ingeniozitate de către acesta, în „Méthodes nouvelles", a unor soluții analitice periodice de bază, care, de altfel, — și aceasta este deosebit de interesant — sînt pentru fiecare problemă în număr finit.

O idee fundamentală care domină „Metodele noi" este verificarea, prin rezultatele ei, a teoriei newtoniene. Astăzi, în urma preciziei rezultatelor de observație făcute se poate mai bine aprecia în ce măsură teoria newtoniană este sau nu confirmată sau mai exactă, cu ce aproximație

teoria newtoniană corespunde cu rezultatele observațiilor. Lăsăm aici această problemă, pentru că nu situația de azi ne preocupă în această introducere, dar mai cu seamă pentru că metodele noi fac să intervină mareele care joacă un rol important, cum a arătat însuși Poincaré, în mișcarea tuturor corpurilor.

Mărturisesc că n-am urmărit niciodată desfășurarea ideilor din vestita, și ea, lucrare asupra Figurilor de echilibru ale unei mase fluide. Interesul pentru această problemă este strîns legat de istoria sistemului solar, a pămîntului însuși, ca și, de altfel, a oricărui corp ceresc despre care se poate presupune că a fost la început o masă fluidă sau a făcut parte dintr-o astfel de masă.

Iată cum prezintă Poincaré însuși succesiunea formelor de echilibru ale aceleiași mase:

„Să considerăm o masă fluidă contractîndu-se prin răcire destul de încet ca să rămînă omogenă și uniformă, din punctul de vedere al mișcării.

Mai întîi de formă aproximativ sferică, va lua forma unui elipsoid de rotație, apoi a unui elipsoid cu trei axe inegale. Mai tîrziu va deveni filiformă, pînă cînd se va desface în două mase inegale".

Poincaré a mai arătat că echilibrul nu poate rămîne stabil, cum s-a cerut pentru trecutul corpurilor sistemului solar, decît dacă viteza de rotație este plafonată de o anume valoare.

Lecțiile lui Poincaré care vorbesc despre ipotezele cosmogonice și care reprezentau în tinerețea mea cea mai înaltă treaptă a cercetării cosmogonice sînt astăzi în general uitate sau numai neglijate, dat fiind materialul imens de informații pe care ni-l trimite cerul. Ideea simplistă a big-bangului și legea lui Hubble, cu îndreptățiri de altfel foarte inegale, domină imaginea pe care ne-o dau teoriile cu cele mai mari succese, pînă cînd se va stabiliza opinia unei mari rezerve în problema originilor și va fi acceptată teorema

formulată de Mecanica invariantivă pentru sistemul de observație al lui Hubble și succesorilor săi. Este de presupus că în acel moment vor fi reluate considerațiile lui Poincaré pentru perioadele de tranziție ale diverselor componente ale Universului.

Ne vom opri și noi un moment la problema care preocupă încă pe diverși astronomi, dar mai cu seamă pe unii geometri sau pe unii filosofi, dacă spectacolul mișcării corpurilor cerești ne poate instrui asupra validității sau nu a geometriei și mecanicii euclidiene. Poincaré n-a avut această prejudecată, care i se va fi părut — cu cîtă dreptate! — nefilosofică, cum vom vedea destul de repede.

De altfel nici n-a fost așteptat Poincaré pentru a se construi în geometria euclidiană modele ale geometriilor neeuclidiene, așa cum este bine știut de la Beltrami și Cayley. Nu spațiul ca atare poartă răspunderea diverselor geometrii posibile, ci sistemul de axiome. El este cel care concretizează aceste geometrii, spațiul rămînînd o abstracție în care încape orice obiect geometric cu respectarea dimensiunii.

H. Poincaré a mers foarte departe în considerarea acestor idei asupra spațiului, folosind construcția cayleyană pentru reprezentarea descoperirilor sale în domeniul funcțiilor fuchsiene și kleineiene.

După Cayley, geometria neeuclidiană se poate construi considerînd ca bază o elipsă care, în limbajul său, reprezintă absolutul, sau — dacă vreți, mai intuitiv — spațiul total. Cu ajutorul său se poate construi distanța între două puncte și orice configurație a geometriei respective. După cum am spus mai sus, Poincaré a imaginat, pentru necredincioșii în astfel de reduceri, și un aspect posibil a fi realizat sub formă concretă. Il reproducem aici cel puțin parțial, după Darboux, atît este el de sugestiv, știindu-l într-o

mare măsură o prețioasă indicație asupra necesității resimțite de Henri Poincaré de a stabili o legătură intuitivă între cele mai abstracte aspecte ale matematicii și realitate.

„Să presupunem, spune H. Poincaré, o lume închisă într-o mare sferă și supusă următoarelor legi:

Temperatura nu este uniformă; este maximă în centrul sferei și se micșorează pe măsură ce ne depărtăm de el, reducîndu-se la zero absolut pentru a atinge sfera în care este inclusă lumea.

Precizăm mai mult legea după care variază această temperatură. Fie R raza sferei limită și r distanța punctului considerat la centrul sferei. Temperatura absolută va fi propoțională cu $R^2 - r^2$.

Voi presupune, în plus, că în această lume toate corpurile au același coeficient de dilatație în așa fel încît lungimea unui segment oarecare să fie proporțională cu temperatura sa absolută. Voi presupune încă, adaugă H. Poincaré, că un obiect transportat dintr-un punct în altul cu temperatură diferită se pune imediat în echilibru caloric cu noul său mediu.

Nimic cu aceste ipoteze nu este contradictoriu și neimaginabil. Un obiect mobil va deveni atunci din ce în ce mai mic pe măsură ce se apropie de sfera limită.

Să observăm mai întîi că, dacă această lume este limitată din punctul de vedere al geometriei noastre obișnuite, ea va apărea infinită pentru locuitorii săi.

În adevăr, atunci cînd aceștia vor să se apropie de sfera limită, ei se răcesc și devin din ce în ce mai mici; pașii pe care îi fac sînt de asemenea din ce în ce mai mici, astfel încît nu pot atinge niciodată sfera limită.

Voi face încă o ipoteză; voi presupune că lumina traversînd medii cu refringență diferită, indicele de refracție este invers proporțional cu

$R^2 - r^2$. Atunci, spune H. Poincaré, în aceste condiții, raza luminoasă nu mai este rectilinie, ci circulară.

În această lume, geometrii ar adopta o geometrie neeuclidiană. Liniile drepte sînt înlocuite cu cercuri ortogonale la sfera limită, iar planele sînt înlocuite cu sfere ortogonale la aceeași sferă limită"

Acestea sînt exact configurațiile pe care Henri Poincaré le folosește în reprezentarea funcțiilor descoperite de el. Ele ne dau și o idee despre unitatea gîndirii matematicianului pentru care, așa cum se vede mai sus, geometria și teoria funcțiilor — creații deopotrivă de abstracte și deopotrivă de adaptabile experienței — nu sînt separate prin ziduri de netrecut. Activitatea intensă a spiritului său tot așa de capabil de cele mai înalte abstracții ca și de cele mai intuitive reprezentări a asigurat științei lui Poincaré acea puternică unitate interioară care trebuie să rămînă un model nu numai pentru știința noastră matematică, dar pentru întreaga știință . . .

Înainte de a continua examenul gîndirii lui Poincaré aplicată științei în genere, mai exact gîndirii științifice, sîntem oarecum obligați să reamintim mărturisirea sa privind unele momente excepționale în procesul propriei gîndiri.

Citez numai acele momente strîns legate de teoria funcțiilor fuchsiene.

„În momentul cînd puneam piciorul pe scara trăsurii — care trebuia să-l ducă cu mai mulți colegi, ingineri de mine, într-o călătorie de studii — mi-a venit ideea, pe care nimic din preocupările mele anterioare n-o prevăzuse, că transformările pe care le-am folosit pentru a utiliza funcțiile fuchsiene erau identice cu cele ale Geometriei neeuclidiene".

Nu mult după aceea, „în cursul unei plimbări pe malul mării, mi-a venit ideea, cu același caracter de rapiditate, de scurtime și de certi-

tudine imediată, că transformările aritmetice ale formelor cuadratice ternare indefinite erau identice cu acele ale Geometriei necuclidiene"

Preocupat în zadar o vreme, după aceste revelații, cu extinderea cîmpului reprezentabil prin grupuri, a funcțiilor fuchsiene pe care le găsise, a fost ținut în loc de anume greutăți tehnice, pe care nu reușea să le învingă. „Într-o zi, traversînd bulevardul, soluția dificultății care mă oprise în loc mi-a apărut dintr-o dată; nu-mi rămînea decît să strîng și să ordonez rezultatele pentru a redacta Memoriul definitiv dintr-un condei, fără nici o piedică".

În aceste trei momente — revelații ale gîndirii care se continua în adîncimile inconștiente — unitatea teoriei aritmetice, a teoriei grupurilor, geometriei și teoriei funcțiilor se impune ca o realitate care constituie un bun fundamental cîștigat de Henri Poincaré pentru știința sa. Această realitate, care avea un așa de evident sprijin în intuiție, a constituit fundalul pe care acest unic gînditor a contribuit la analiza unor probleme ce privesc fundamentele matematicii sau justificarea rolului important pe care ele îl au în edificarea științelor naturii.

Operele sale în acest domeniu și-au deschis repede un drum regal în rîndul celor preocupați de filosofia științei și al unui public foarte larg, dornic să înțeleagă rosturile științei în viața umană. Nu numai „Știința și Ipoteza", „Valoarea științei" și „Știința și Metoda", apărute în Editura Flammarion una după alta, dar și articolele asupra rolului intuiției și al logicii în matematică, asupra principiilor mecanicii, asupra legăturilor dintre fizica matematică și cea experimentală au avut ecouri puternice și au constituit și pentru noi tinerii de atunci o admirabilă cale de acomodare, la nivelul cel mai eficient, cu mersul înainte, niciodată oprit, nu numai al științelor matematice, ci al tuturor științelor.

Opera filosofică a lui Henri Poincaré a fost un mare dar făcut iubitorilor de adevăr, pe care el îl considera ca fiind țelul cel mai prețios al gîndirii umane. Această operă, punînd sub semnul criticii orice cercetare, condamnă deopotrivă dogmatismul unora și scepticismul altora. Ipotezele prin care gîndirea noastră participă la construirea științei nu sînt arbitrare. Analizei diverselor aspecte ale ipotezelor de care se servește știința, chiar în aspectele ei primare, i-a fost consacrată de către Poincaré lucrarea intitulată „Știință și Ipoteză", pe care Constantin Popescu-Ulmu o prezintă în versiune românească datorită înțelegerii pe care o arată în ultima vreme problemelor gîndirii Editura Științifică și Enciclopedică. În această carte, căreia oamenii de știință de pretutindeni îi sînt datori cu o mai clară viziune a misiunii lor în cunoașterea și enunțarea adevărului, Henri Poincaré demonstrează cît de intim legat de raționamentul matematic este aspectul său inductiv. Numai cu o asemenea înțelegere, un mare cercetător ca David Hilbert a reușit să-și completeze sistemul de axiome ce stă la baza geometriei, care, multă vreme părea să fie, pînă și unor mari matematicieni, fructul unui pur raționament deductiv din anume date, chiar dacă recunoșteau în acestea și prezența experienței.

În puținele rînduri ale acestei introduceri la marea operă filosofică a lui H. Poincaré nu voi mai aborda și alte probleme ale „Științei și Ipotezei", nici chiar pe acelea pasionante, care au pășit cu sugestii complet noi pe drumul lămuririi rostului numărului și al mărimii, ca să nu impietez frumusețea textului și prospețimea — chiar pentru zilele noastre — a unor reflecții cu care cititorul trebuie să ia un contact nemijlocit. El va vedea cu acest prilej și cît de strîns legate sînt marile idei care au dus la nemuritoarea operă a lui Maxwell — revelată științei europene

de Poincaré însuși, alături, desigur, și de Hertz în Germania — de opera lui Fresnel și chiar a lui Ampère.

Dar nu putem încheia aceste considerații fără a vorbi de a doua carte, în ordinea apariției, intitulată „Valoarea științei", în care H. Poincaré atacă noțiunile fundamentale de care trebuie să țină seamă atît știința, cît și însăși organizarea existenței noastre pe acest pămînt: Spațiul. Timpul, Cauzalitatea și Logica, implicate de științele materiei și ale vieții. Scopul său final este să arate că valoarea științei este în strictă dependență de valoarea de adevăr pe care-l cuprind aceste concepte fundamentale așa cum sînt gîndite ele de marii creatori de știință.

Dar oare oamenii de știință gîndesc toți la fel? E bine știut că unii sînt predominant logicieni, în vreme ce alții stau mai cu seamă sub impulsul intuiției. Exemple greu de contrazis sînt numeroase. Poincaré citează pe logicianul Hermite și pe intuitivistul Bertrand, pe logicistul Weierstrass și pe intuitivistul B. Riemann. Dar rolul lor în aparență diferit concură deopotrivă la progresul științei. Intuiția, spune Poincaré, nu ne poate da rigoarea, nici măcar certitudinea. Știința, uneori chiar a aceluiași spirit intuitivist, trebuie să se supună, prin definiții adecvate, de pildă, rigorile logice. Un model istoric a fost realizat de Euclid, intuitivist în organizarea în mare a materialului geometric, logicist prin introducerea eventuală a axiomelor sale, cînd trebuia să demonstreze, prin teoreme, proprietăților obiectele sale. Analiza pură, spune în concluzia unui lung examen Poincaré, ne pune la dispoziție numeroasele sale procedee sigure. Dar alegerea unuia dintre aceste procedee, pentru a ajunge cît mai științific la stăpînirea adevărului, este funcția principală a intuiției. Cum operează ele cînd este vorba de conceptele fundamentale?

Atîta vreme cît sîntem în domeniul conștiinței, noțiunea de timp este relativ clară, spune Poincaré; ideea de anterior, posterior, concomitent, chiar în ce privește previziunile, sînt clare; de asemenea simultaneitatea. Dar de îndată ce voim a ne referi la un timp științific și fizic încep dificultățile. În primul rînd aceea de a introduce o măsură. Aici e locul criticii poincariene, care se exercită cu o vervă neîntrecută, pentru că în definiția egalității timpurilor introduce și ideea de cauză. Autorul găsește în comoditate principiul alegerii celei mai bune unități de timp. Convenția rezolvă pentru el celelalte dificultăți, pe care e greu să le urmărim aici, dar putem da concluzia: simultaneitatea, ordinea fenomenelor trebuie definite astfel, încît enunțul legilor naturale să fie cît mai simplu.

În problema spațiului trece mai repede asupra diferențierii, oarecum tipice, între spațiul euclidian și cel neeuclidian, sprijinit pe o identate principială a lor din punct de vedere intuitiv și pe un principiu de comoditate cînd e vorba de nevoia unei reprezentări efective. Dar aprofundează studiul continuității și mai cu seamă pe cel al numărului de dimensiuni cînd este vorba de reprezentarea lumii fizice.

Păstrîndu-se în cadrul general, Poincaré introduce noțiunea de tăietură care separă spațiul. Greutatea care subzistă pentru intuiție se găsește numai la sfîrșitul unei succesiuni de tăieturi, care ajunge la ceea ce numim punct și care nu mai este susceptibil de tăietură. Dar această problemă conduce, la rîndul ei, la aceea a deplasărilor, la grupul deplasărilor, care conduce și ea, la rîndul său, la rolul pe care-l joacă senzațiile musculare și experiența, toate coordonate de conștiința noastră, care reflectă, odată cu o anume realitate internă, și legile care ne ajută să înțelegem universul, să ne mișcăm în el. Fie și numai o clipă!

Sîntem siliți să punem un sfîrșit considerațiilor noastre asupra gîndirii științifice și filosofice a maestrului matematicii contemporane. O facem cu amintirea ultimei sale lucrări: o lucrare de matematică totuși, o lucrare în problema celor trei corpuri. Voi reproduce aici, tot după admirabila Introducere la Opera lui Henri Poincaré a lui Darboux, dramatica scrisoare a maestrului către matematicianul M. Guccia, directorul vestitei reviste „Circolo matematico di Palermo":

„Scumpe prieten, v-am vorbit la ultima vizită de o lucrare care îmi reține atenția în ultimii doi ani. Nu sînt mai înaintat și mă decid să o părăsesc, în mod provizoriu, ca să-i dau timpul să se coacă. Totul ar merge bine dacă aș putea fi sigur că pot să o reiau; la vîrsta mea nu pot fi sigur, dar rezultatele obținute, susceptibile de a pune pe cercetători pe o cale nouă și încă neexplorată, mi se par prea pline de promisiuni, cu toate decepțiile pe care ele mi le-au cauzat, ca să mă resemnez să le sacrific. În aceste condiții ați găsi oare convenabil să publicați un Memoriu neisprăvit, în care aș expune scopul pe care l-am urmărit, problema pe care mi-am propus-o și rezultatul sforțărilor pe care le-am făcut ca să le rezolv? Lucrul ar fi cam neobișnuit, dar ar fi poate folositor. Ceea ce mă încurcă este faptul că ar trebui să pun multe figuri, tocmai pentru că n-am putut obține o regulă generală și am acumulat doar un număr de soluții particulare. Spuneți-mi, vă rog, ce gîndiți despre această soluție și ce mă sfătuiți... Prieten devotat, Poincaré".

Memoriul publicat a avut titlul: „Asupra unei teoreme de Geometrie" și a apărut în 1912. El constituie preludiul la o rezolvare a problemei celor trei corpuri, la care, desigur, Poincaré a contribuit în mod substanțial prin sugestiile pe care le implică aici, prin instrumentele matematice pe care le punea atunci, și le pusese și în

lucrările sale anterioare, la dispoziția matematicienilor epocii.

Sfîrșitul vieții acestui om excepțional n-a întîrziat. La 17 iulie 1912 întreaga lume matematică, nu numai din propria țară, lua doliu pentru o pierdere unanim resimțită. Era pierderea celui mai expresiv, mai vigilent, mai original mentor al gîndirii asupra științei.

Acad. *OCTAV ONICESCU*

ȘTIINȚĂ ȘI IPOTEZĂ

Introducere

Pentru un observator superficial, adevărul științific se află în afara oricărei îndoieli; logica științei este infailibilă și, dacă savanții se înșeală cîteodată, aceasta se datorește faptului că îi nesocotesc regulile.

Adevărurile matematice derivă dintr-un mic număr de propoziții evidente, printr-un lanț de raționamente perfecte, și se impun nu numai nouă, ci și naturii însăși. Ele îl încătușează chiar și pe Creator, îngăduindu-i să aleagă dintre cîteva soluții, relativ puțin numeroase. Ne vor fi suficiente în acest caz cîteva experiențe pentru a afla ce alegere a făcut el. Din fiecare experiență vor putea rezulta, printr-o serie de deducții matematice, o mulțime de consecințe, și astfel fiecare dintre ele ne va dezvălui un colț al Universului.

Iată care este pentru oamenii obișnuiți și pentru liceenii care capătă primele noțiuni de fizică originea certitudinii științifice. Iată cum înțeleg ei rolul experimentării și al matematicilor. Tot astfel îl înțelegeau, acum o sută de ani, mulți savanți care visau să construiască lumea apelînd cît mai puțin la experiență.

Cînd s-a meditat ceva mai mult asupra acestui lucru, s-a observat locul deținut de ipoteză; s-a văzut că matematicianul nu s-ar putea lipsi de ipoteză și că nici experimentatorul nu se dispen-

seazã de ea. Drept urmare, a apărut întrebarea dacă toate aceste construcţii erau într-adevăr solide. A fi sceptic în acest mod, înseamnă a fi superficial. A te îndoi de tot sau a crede tot sînt două soluţii la fel de comode, amîndouă scutindu-ne să reflectăm. Aşadar, în loc de a respinge în mod pripit rolul ipotezei, trebuie să-l examinăm cu grijă; vom recunoaşte atunci nu numai că ipoteza este necesară, ci şi legitimă adeseori. Vom vedea, de asemenea, că există mai multe feluri de ipoteze, că unele sînt verificabile şi că, odată confirmate de experienţă, ele devin adevăruri fecunde; altele, fără a ajunge să ne inducă în eroare, pot să ne fie utile, fixîndu-ne ideile; altele, în sfîrşit, nu sînt ipoteze decît în aparenţă şi se reduc la definiţii sau la convenţii deghizate.

Acestea din urmă se întîlnesc mai ales în matematici şi în ştiinţele învecinate. Tocmai de aici îşi trag aceste ştiinţe rigoarea lor; astfel de convenţii sînt opera activităţii libere a spiritului nostru, care, în acest domeniu, este total liber. Aici spiritul nostru poate face afirmaţii, pentru că el decretează; dar să ne înţelegem: aceste decrete se impun ştiinţei *noastre*, care, fără ele, ar fi imposibilă; ele nu se impun naturii. Sînt totuşi aceste decrete arbitrare? Nu, căci altfel ar fi sterile. Experienţa nu influenţează libera noastră alegere decît călăuzind-o, ajutîndu-ne să discernem drumul cel mai comod. Decretele noastre sînt, aşadar, asemenea celor ale unui prinţ absolut, dar înţelept, care şi-ar consulta Consiliul de stat.

Unii au fost frapaţi de acest caracter de convenţie liberă al anumitor principii fundamentale ale ştiinţelor. Ei au vrut să generalizeze peste măsură, uitînd că libertatea nu înseamnă arbitrarul. Au ajuns astfel la ceea ce se numeşte *nominalism*, întrebîndu-se dacă savantul nu este victima definiţiilor sale şi dacă lumea pe care el

crede că o descoperă nu este de fapt creată dintr-un capriciu al său [1]. În aceste condiții, știința ar fi sigură, dar lipsită de valoare.

Dacă ar fi astfel, știința ar fi neputincioasă. Or, noi o vedem în fiecare zi acționînd sub ochii noștri. Aceasta nu s-ar putea întîmpla dacă ea nu ne-ar dezvălui ceva din realitate; dar ceea ce poate atinge ea nu sînt lucrurile înseși, cum gîndesc dogmaticii naivi, ci doar raporturile dintre lucruri; în afara acestor raporturi nu există realitate care să poată fi cunoscută.

Aceasta este concluzia la care vom ajunge, dar în acest scop va trebui să parcurgem întreaga serie a științelor, de la aritmetică și geometrie pînă la mecanică și fizica experimentală.

Care este natura raționamentului matematic? Este el în mod real deductiv, așa cum se crede de obicei? O analiză aprofundată ne arată că acest lucru nu este adevărat, că raționamentul matematic are într-o anumită măsură natura raționamentului inductiv și că prin aceasta este el fecund. El își păstrează totuși caracterul rigorii absolute; iată ceea ce trebuie să dovedim mai întîi.

Cunoscînd acum mai bine unul dintre instrumentele pe care matematicile le pun la dispoziția cercetătorului, trebuie să analizăm și o altă noțiune fundamentală, aceea a mărimii matematice. O găsim noi în natură, sau noi sîntem cei care o introducem aici? Și, în cazul din urmă, nu riscăm oare să falsificăm totul? Comparînd datele brute ale simțurilor noastre cu acest concept extrem de complex și de subtil pe care matematicienii îl numesc mărime, sîntem forțați să recunoaștem o divergență; acest cadru în care vrem să introducem totul este făcut, așadar, de către noi, dar noi nu l-am făcut la

---

[1] A se vedea E. Le Roy, *Science et Philosophie* (Revue de Métaphysique et de Morale, 1901).

întîmplare, l-am făcut, pentru a spune astfel, pe măsură, și din această cauză putem să introducem în el faptele fără a denatura ceea ce au ele esențial.

Un alt cadru pe care noi îl impunem lumii este spațiul. De unde vin primele principii ale geometriei? Ne sînt ele impuse de către logică? Lobacevski a arătat că nu, creînd geometriile neeuclidiene. Ne este revelat oare spațiul de către simțuri? Iarăși nu, căci spațiul pe care ni l-ar putea arăta ele diferă total de acela al geometrului. Derivă oare geometria din experiență? O discuție aprofundată ne va arăta că nu. Vom conchide că principiile sale nu sînt decît convenții; dar aceste convenții nu sînt arbitrare, căci dacă ne-am afla într-o altă lume (pe care eu o numesc lumea neeuclidiană și pe care caut să o imaginez), am fi determinați să adoptăm altele.

În mecanică, am fi conduși la concluzii analoage și am vedea că principiile acestei științe, deși mai direct sprijinite pe experiență, au încă acel caracter convențional al postulatelor geometrice. Pînă aici nominalismul triumfă, dar ajungem la științele fizice propriu-zise. Aici scena se schimbă; întîlnim un alt gen de ipoteze și le vedem întreaga fecunditate. Fără îndoială că, la prima abordare, teoriile ni se par fragile, și istoria științei ne dovedește că ele sînt efemere; ele nu mor totuși în întregime, din fiecare rămînînd cîte ceva. Tocmai acest ceva trebuie să căutăm să-l clarificăm, pentru că aici, și numai aici se află veritabila realitate.

Metoda științelor fizice se bazează pe inducție, care ne face să așteptăm repetarea unui fenomen atunci cînd sînt reproduse circumstanțele în care acesta a luat naștere prima oară. Dacă *toate* aceste circumstanțe ar putea să se reproducă în același timp, un astfel de principiu ar putea fi aplicat fără teamă: dar aceasta nu se întîmplă

niciodată; cîteva dintre circumstanțe vor fi totdeauna absente. Sîntem noi oare absolut siguri că acestea sînt fără importanță? Evident că nu. Poate fi verosimil, dar nu riguros sigur. De aici rolul considerabil pe care îl joacă în științele fizice noțiunea de probabilitate. Calculul probabilităților nu este deci numai o recreație sau o călăuză pentru jucătorii de baccara, iar noi trebuie să căutăm să-i aprofundăm principiile. Sub acest raport, eu nu am putut obține decît rezultate incomplete, într-atît scapă analizei acest instinct vag care ne permite să discernem verosimilul.

După ce vom fi studiat condițiile în care lucrează fizicianul, vom considera că trebuie să-l arătăm în acțiune. În acest scop, vom lua cîteva exemple din istoria opticii și din cea a electricității. Vom vedea de unde au ieșit ideile lui Fresnel, acelea ale lui Maxwell, și ce ipoteze inconștiente făceau Ampère și ceilalți fondatori ai electrodinamicii.

Partea întîi

Numărul și mărimea

Capitolul I

Despre natura raționamentului matematic

I

Însăși posibilitatea științei matematice pare o contradicție insolubilă. Dacă această știință nu este deductivă decît în aparență, de unde îi vine rigoarea perfectă, pe care nimeni nu se gîndește să i-o pună la îndoială? Dacă, din contră, toate propozițiile pe care ea le enunță pot rezulta unele din altele prin regulile logicii formale, atunci cum nu se reduce matematica la o imensă tautologie? Silogismul nu poate să ne învețe nimic esențial nou, întrucît dacă totul trebuie să iasă din principiul identității, totul trebuie, de asemenea, să se poată reîntoarce aici. Se va admite, deci, că enunțurile tuturor teoremelor care umplu atîtea volume nu sînt decît moduri ocolite de a spune că A este A?

Fără îndoială, ne putem întoarce la axiomele care se află la originea tuturor raționamentelor. Dacă socotim că nu este posibil să le reducem la principiul contradicției, dacă nu vrem să vedem aici nici faptele experimentale, care nu pot avea caracterul unei necesități matematice, ne rămîne posibilitatea de a le clasifica printre judecățile sintetice *a priori*. Aceasta nu înseamnă însă a rezolva dificultatea, ci numai a o numi; și chiar atunci cînd natura judecăților sintetice nu ar mai avea nici o taină pentru noi, contradicția

nu ar dispărea, ci doar s-ar retrage; raționamentul silogistic rămîne incapabil să adăuge ceva la datele care îi sînt furnizate; aceste date se reduc la cîteva axiome și nu vom regăsi altceva în concluzii.

Nici o teoremă nu ar trebui să fie numită nouă dacă în demonstrația sa nu intervine o axiomă nouă; raționamentul nu poate să ne redea decît adevărurile nemijlocit evidente împrumutate de la intuiția directă; el nu mai e, în acest caz, decît un intermediar parazit și, prin urmare, nu ar fi cazul să ne întrebăm dacă întregul aparat silogistic nu servește la altceva decît la a ascunde împrumutul nostru făcut de la intuiție?

Contradicția ne va izbi și mai mult dacă deschidem o carte oarecare de matematici; la fiecare pagină autorul își anunță intenția de a generaliza o propoziție deja cunoscută. Metoda matematică procedează, așadar, de la particular la general, dar atunci cum mai poate fi numită ea deductivă?

Dacă, în sfîrșit, știința numărului ar fi pur analitică, sau ar putea rezulta în mod analitic dintr-un mic număr de judecăți sintetice, s-ar părea că un intelect destul de puternic ar putea să descopere dintr-o dată toate adevărurile; dar ce spun! s-ar putea spera chiar ca, într-o zi, pentru a exprima aceste adevăruri, să se inventeze un limbaj destul de simplu pentru ca ele să apară astfel imediat unei inteligențe obișnuite.

Dacă refuzăm să admitem aceste consecințe, trebuie neapărat să concedem că raționamentul matematic are prin el însuși un fel de virtute creatoare și că, prin urmare, el se deosebește de silogism.

Diferența trebuie să fie chiar profundă. Noi nu vom găsi, de exemplu, cheia misterului în întrebuințarea frecventă a regulii după care o

aceeași operație aplicată la două numere egale va da rezultate identice.

Toate aceste moduri de raționament, fie că sînt sau nu reductibile la silogismul propriu-zis, păstrează caracterul analitic și sînt chiar prin aceasta neputincioase.

II

Dezbaterea este veche; Leibniz deja căuta să demonstreze că 2 și cu 2 fac 4; să examinăm puțin demonstrația sa.

Presupun că au fost definite numărul 1 și operația $x + 1$, care constă în a adăuga unitatea la un număr dat x.

Definițiile, oricare ar fi ele, nu vor interveni în desfășurarea raționamentului.

Definesc apoi numerele 2, 3 și 4 prin egalitățile:

$$(1)\ 1 + 1 = 2;\ (2)\ 2 + 1 = 3;$$

$$(3)\ 3 + 1 = 4.$$

Definesc tot astfel operația $x + 2$ prin relația:

$$(4)\ x + 2 = (x + 1) + 1.$$

Acestea fiind stabilite, avem:

$2 + 2 = (2 + 1) + 1$ (Definiția 4)

$(2 + 1) + 1 = 3 + 1$ (Definiția 2)

$3 + 1 = 4$ (Definiția 3)

de unde

$2 + 2 = 4$ Q.E.D.

Nu s-ar putea nega că acest raționament nu este pur analitic. Dar întrebați pe un matematician oarecare: „Aceasta nu e o demonstrație

propriu-zisă, vă va răspunde el, este o verificare". Ne-am mulțumit să apropiem una de alta două definiții pur convenționale și s-a constatat identitatea lor; nu am aflat nimic nou. *Verificarea* diferă de demonstrația veritabilă pentru că este pur analitică și pentru că este sterilă. E sterilă pentru că concluzia nu este decît traducerea premiselor într-un alt limbaj. Demonstrația veritabilă este fecundă, din contră, pentru că concluzia este aici într-un sens mai generală decît premisele.

Egalitatea $2 + 2 = 4$ nu a fost susceptibilă astfel de verificare decît datorită faptului că este particulară. Orice enunț particular în matematici va putea totdeauna să fie verificat în acest mod. Dar dacă matematica ar trebui să se reducă la un șir de atari verificări, ea nu ar fi o știință. Astfel, un jucător de șah, de exemplu, nu creează o știință cîștigînd o partidă. Nu există știință decît a generalului.

Se poate spune chiar că științele exacte au tocmai ca scop de a ne dispensa de aceste verificări directe.

III

Să-l vedem deci pe geometru la lucru și să încercăm să-i surprindem procedeele.

Sarcina nu-i lipsită de dificultăți; nu este suficient să deschizi o lucrare la întîmplare și să analizezi aici o demonstrație oarecare.

Trebuie să excludem mai întîi geometria în care chestiunea se complică cu probleme anevoioase privind rolul postulatelor, natura și originea noțiunii de spațiu. Pentru rațiuni analoage, nu putem să ne adresăm analizei infinitezimale. Trebuie să căutăm gîndirea matematică acolo unde ea a rămas pură, adică în aritmetică.

Trebuie să alegem iarăşi; în părţile cele mai elevate ale teoriei numerelor, noţiunile matematice primitive au suferit deja o elaborare atît de profundă, încît devine dificil să le analizezi.

Aşadar, la începutul aritmeticii trebuie să ne aşteptăm să găsim explicaţia pe care o căutăm, dar se întîmplă ca, tocmai în demonstraţia teoremelor celor mai elementare, autorii tratatelor clasice să dovedească foarte puţină precizie şi rigoare. Nu trebuie să le aducem vreo vină; ei s-au supus unei necesităţi; debutanţii nu sînt pregătiţi pentru veritabila rigoare matematică; ei nu ar vedea în aceasta decît subtilităţi vane şi plictisitoare; s-ar pierde timpul dacă ai vrea să-i faci prea curînd mai exigenţi; trebuie ca ei singuri să refacă rapid drumul pe care l-au parcurs lent fondatorii ştiinţei, fără să sară peste etape.

Pentru ce este necesară oare o atît de lungă pregătire spre a te obişnui cu această rigoare perfectă, care, se pare, ar trebui să se impună în mod firesc tuturor inteligenţelor deosebite? Este vorba aici de o problemă logică şi psihologică care se impune a fi aprofundată.

Dar nu ne vom opri asupra ei; ea nu face obiectul cercetării noastre; tot ceea ce vreau eu să reţin este faptul că, deşi riscăm să nu ne atingem scopul, trebuie să refacem demonstraţiile teoremelor elementare şi să le dăm nu forma grosieră în care sînt expuse, pentru a nu plictisi pe debutanţi, ci aceea care poate satisface un geometru exersat.

Definiţia adunării. — Presupun că s-a definit în prealabil operaţia $x + 1$, care constă în a adăuga numărul 1 la un număr dat x.

Această definiţie, oricare ar fi ea dealtminteri, nu va mai juca nici un rol în şirul raţionamentelor.

Acum este vorba de a defini operaţia $x + a$, care constă în a adăuga numărul a la un număr dat x.

Presupunînd că s-a definit operația

$$x + (a - 1),$$

operația $x + a$ va fi definită de egalitatea:

$$(1)\quad x + a = [x + (a - 1)] + 1.$$

Vom şti, aşadar, ce este $x + a$, cînd vom şti ce este $x + (a - 1)$, şi cum am presupus la început că se ştie ce este $x + 1$, se vor putea defini succesiv şi „prin recurență" operațiile $x + 2$, $x + 3$ etc.

Această definiție merită o clipă de atenție, ea fiind de o natură particulară care o deosebește deja de definiția pur logică; egalitatea (1) conține, într-adevăr, o infinitate de definiții distincte, fiecare dintre ele neavînd un sens decît atunci cînd se cunoaşte aceea care o precede.

Proprietăți ale adunării, — *Asociativitatea.* — Spun că

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Teorema este adevărată pentru $c = 1$; atunci ea se scrie:

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1,$$

ceea ce nu este altceva, exceptînd diferența dintre notații, decît egalitatea (1) prin care tocmai am definit adunarea.

Să presupunem că teorema este adevărată pentru $c = \gamma$; spun că va fi adevărată pentru $c = \gamma + 1$; fie, într-adevăr,

$$(a + b) + \gamma = a + (b + \gamma);$$

se va deduce de aici succesiv:

$$[(a + b) + \gamma] + 1 = [a + (b + \gamma)] + 1,$$

sau, în virtutea definiției (1),

$$(a + b) + (\gamma + 1) = a + (b + \gamma + 1) =$$
$$= a + [b + (\gamma + 1)],$$

ceea ce arată, printr-o serie de deducții pur analitice, că teorema este adevărată pentru $\gamma + 1$.

Fiind adevărată pentru $c = 1$, s-ar vedea astfel succesiv că este adevărată pentru $c = 2$, pentru $c = 3$ etc.

Comutativitatea. — 1. Spun că

$$a + 1 = 1 + a.$$

Teorema este evident adevărată pentru $a = 1$; s-ar putea *verifica*, prin raționamente pur analitice, că, dacă ea este adevărată pentru $a = \gamma$, ea va fi adevărată și pentru $a = \gamma + 1$; or, ea este adevărată pentru $a = 1$, deci va fi adevărată și pentru $a = 2$, pentru $a = 3$ etc.; ceea ce se exprimă spunînd că propoziția enunțată este demonstrată prin recurență.

2. Spun că

$$a + b = b + a.$$

Teorema a fost demonstrată mai sus pentru $b = 1$; se poate *verifica* analitic că, dacă ea este adevărată pentru $b = \beta$, ea va fi și pentru $b = \beta + 1$.

Propoziția este deci stabilită prin recurență.

Definiția înmulțirii. — Vom defini înmulțirea prin egalitățile:

$$(1)\quad a \times 1 = a,$$

$$(2)\quad a \times b = [a \times (b - 1)] + a.$$

Egalitatea (2) conține, ca și egalitatea (1), o infinitate de definiții; definind $a \times 1$, ea permite să definim în mod succesiv: $a \times 2$, $a \times 3$ etc.

Proprietăți ale înmulțirii. — *Distributivitatea.* — Spun că

$$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c).$$

Se verifică analitic că egalitatea este adevărată pentru $c = 1$; apoi că, dacă teorema este adevărată pentru $c = \gamma$, ea va fi adevărată și pentru $c = \gamma + 1$.

Propoziția este demonstrată din nou prin recurență.

Comutativitatea. — 1. Spun că

$$a \times 1 = 1 \times a.$$

Teorema este evidentă pentru $a = 1$.

Se verifică analitic că, dacă ea este adevărată pentru $a = \alpha$, ea va fi adevărată și pentru $a = \alpha + 1$.

2. Spun că

$$a \times b = b \times a.$$

Teorema a fost demonstrată mai sus pentru $b = 1$. Se va verifica analitic că, dacă ea este adevărată pentru $b = \beta$, ea va fi adevărată și pentru $b = \beta + 1$.

IV

Pun capăt aici acestei serii monotone de raționamente. Dar tocmai această monotonie a făcut să reiasă mai bine procedeul care este uniform și pe care îl întîlnim la fiecare pas.

Acest procedeu este demonstrația prin recurență. Se stabilește mai întîi o teoremă pentru $n = 1$; se arată apoi că, dacă ea este adevărată pentru $n - 1$, este adevărată și pentru n și se conchide de aici că este adevărată pentru toate numerele întregi.

Am văzut mai sus cum putem să ne folosim de ea pentru a demonstra regulile adunării și ale înmulțirii, adică regulile calculului algebric; acest calcul este un instrument de transformare care poate fi folosit la mult mai multe combinații diverse decît simplul silogism; dar este tot un instrument pur analitic și incapabil de a ne învăța

ceva nou. Dacă matematicile nu ar avea un altul, ele nu s-ar putea dezvolta; dar ele recurg din nou la același procedeu, adică la raționamentul prin recurență, putînd astfel să-și continue mersul înainte.

La fiecare pas, dacă privim bine, regăsim acest tip de raționament, fie sub forma simplă pe care i-am dat-o mai sus, fie sub o formă mai mult sau mai puțin modificată.

Acesta este deci raționamentul matematic prin excelență și el trebuie examinat mai de aproape.

V

Caracterul esențial al raționamentului prin recurență constă în faptul că el conține, condensate, pentru a spune astfel, într-o formulă unică, o infinitate de silogisme.

Pentru a ne putea da mai bine seama de aceasta, voi enunța unele după altele aceste silogisme, care sînt, dacă îmi este permisă expresia, dispuse în cascadă. Ele sînt, bineînțeles, silogisme ipotetice.

Teorema este adevărată pentru numărul 1.

Or, dacă este adevărată pentru 1, este adevărată pentru 2.

Deci, este adevărată pentru 2.

Or, dacă este adevărată pentru 2, este adevărată pentru 3.

Deci, este adevărată pentru 3 și așa mai departe.

Se vede că concluzia fiecărui silogism servește ca premisă minoră pentru următorul.

În plus, premisele majore ale tuturor silogismelor noastre pot fi aduse la o formulă unică.

Dacă teorema este adevărată pentru $n - 1$, ea este și pentru n.

Se vede deci că, în raționamentele prin recurență, ne mărginim să enunțăm premisa minoră a primului silogism și formula generală care conține drept cazuri particulare toate premisele majore.

Acest șir de silogisme care nu s-ar sfîrși niciodată este astfel redus la o frază de cîteva rînduri.

Este ușor acum să înțelegem pentru ce orice consecință particulară a unei teoreme poate, așa cum am explicat mai sus, să fie verificată prin procedee pur analitice.

Dacă, în loc să arătăm că teorema noastră este adevărată pentru toate numerele, vrem să arătăm numai că ea este adevărată pentru numărul 6, de exemplu, ne va fi suficient să stabilim primele 5 silogisme ale cascadei noastre; ne-ar trebui 9 dacă am vrea să demonstrăm teorema pentru numărul 10; ne-ar trebui și mai multe pentru un număr mai mare; dar, oricît de mare ar fi acest număr, totdeauna, în cele din urmă, am reuși să-l atingem și verificarea analitică ar fi posibilă.

Și totuși, oricît de departe am merge astfel, nu ne-am ridica niciodată pînă la teorema generală, aplicabilă tuturor numerelor, singura care poate fi obiect al unei științe. Pentru a ajunge aici, ar trebui o infinitate de silogisme, ar trebui trecut un abis pe care analistul, cu mijloacele logicii formale de care dispune, nu va reuși niciodată să-l depășească.

Mă întrebam la început pentru ce nu s-ar putea concepe un spirit atît de puternic care să perceapă dintr-o dată ansamblul adevărurilor matematice.

Răspunsul este ușor de dat acum; un jucător de șah poate combina patru, cinci mutări înainte, dar, oricît de deosebit l-am socoti, el nu va putea pregăti niciodată decît un număr finit al acestora; dacă și-ar aplica aptitudinea la aritmetică, el nu ar putea să perceapă adevărurile generale printr-o singură intuiție directă; pentru a ajunge la cea mai mică teoremă, el nu se va putea lipsi de ajutorul raționamentului prin recurență, pentru că acesta este un instrument care permite de a se trece de la finit la infinit.

Acest instrument este totdeauna util, întrucît, făcîndu-ne să trecem dintr-un salt peste atîtea etape cîte dorim, el ne scutește de verificări lungi, plictisitoare și monotone, care ar deveni repede impracticabile. Însă el devine indispensabil de îndată ce vizăm teorema generală, de care verificarea analitică ne-ar apropia fără încetare, fără să ne permită a ajunge la ea.

În acest domeniu al aritmeticii ne putem crede foarte departe de analiza infinitezimală și, totuși, după cum am văzut, ideea infinitului matematic joacă deja un rol preponderent, fără ea neputînd exista știință, pentru că nu ar exista nimic general.

VI

Judecata pe care se bazează raționamentul prin recurență poate fi pusă sub alte forme; se poate spune, de exemplu, că într-o colecție infinită de numere întregi diferite, există totdeauna unul care este mai mic decît toate celelalte.

Se va putea trece cu ușurință de la un enunț la altul creîndu-se astfel iluzia că s-a demonstrat legitimitatea raționamentului prin recurență. Dar vom fi opriți întotdeauna, vom ajunge întotdeauna la o axiomă nedemonstrabilă, care nu va fi, în fond, decît propoziția de demonstrat tradusă într-un alt limbaj.

Nu ne putem sustrage deci de la concluzia că regula raționamentului prin recurență este ireductibilă la principiul contradicției.

Această regulă nu ne poate veni nici de la experiență; ceea ce ar putea să ne facă cunoscut experiența e că regula este adevărată pentru primele zece, o sută de numere, de exemplu; ea nu poate acoperi șirul indefinit al numerelor, ci numai o parte a lui mai mult sau mai puțin lungă, dar totdeauna limitată.

Or, dacă nu ar fi vorba decît de aceasta, principiul contradicției ar fi de ajuns, el ne-ar permite

totdeauna să dezvoltăm atîtea silogisme cîte am vrea; numai cînd este vorba de a cuprinde o infinitate de silogisme într-o singură formulă, numai în fața infinitului eșuează acest principiu, și tot aici experiența devine neputincioasă. Această regulă, inaccesibilă demonstrației analitice și experienței, este veritabilul tip de judecată sintetică *a priori*. Nu ne-am putea gîndi, pe de altă parte, să vedem aici o convenție, ca pentru unele din postulatele geometriei.

Pentru ce ni se impune, așadar, această judecată cu o evidență irezistibilă? Pentru că ea este afirmarea puterii spiritului care se știe capabil de a concepe repetarea indefinită a unui aceluiași act, de îndată ce acesta este posibil o dată. Spiritul are o intuiție directă despre această putere, experiența nefiind pentru spirit decît o ocazie de a se servi de ea și, prin aceasta, de a deveni conștient de ea.

Dar, se va spune, dacă experiența brută nu poate legitima raționamentul prin recurență, experiența sprijinită de inducție poate face acest lucru? Vedem, succesiv, că o teoremă este adevărată pentru numărul 1, numărul 2, numărul 3 și așa mai departe; spunem că *legea este manifestă* și are aceeași justificare ca orice lege fizică bazată pe observații al căror număr este foarte mare, dar limitat.

Nu s-ar putea să nu recunoaștem că aici există o analogie izbitoare cu procedeele obișnuite ale inducției. Însă o diferență esențială subzistă. Inducția, aplicată în științele fizice, este totdeauna nesigură, pentru că ea se bazează pe credința într-o ordine generală a Universului, ordine care se află în afara noastră. Inducția matematică, adică demonstrația prin recurență, se impune, din contră, în mod necesar, pentru că ea este afirmarea unei proprietăți a spiritului însuși.

VII

Matematicienii, așa cum am spus mai sus, se străduiesc totdeauna *să generalizeze* propozițiile pe care le-au obținut, și pentru a nu căuta un alt exemplu, să reamintim că adineauri am demonstrat egalitatea

$$a + 1 = 1 + a,$$

și ne-am servit apoi de ea pentru a stabili egalitatea

$$a + b = b + a,$$

care este evident mai generală.

Matematicile pot, așadar, ca și celelalte științe, să procedeze de la particular la general.

Există aici un fapt care ni s-ar fi părut de neînțeles la începutul acestui studiu, dar care nu mai are nimic misterios pentru noi de cînd am constatat analogia demonstrației prin recurență cu inducția obișnuită.

Fără îndoială, raționamentul matematic recurent și raționamentul fizic inductiv se bazează pe fundamente diferite, dar mersul lor este paralel — ele merg în același sens, adică de la particular la general.

Să examinăm chestiunea puțin mai de aproape.

Pentru a demonstra egalitatea:

(1) $$a + 2 = 2 + a,$$

este suficient să aplicăm de două ori regula

$$a + 1 = 1 + a$$

și să scriem:

(2) $$a + 2 = a + 1 + 1 = 1 + a + 1 =$$

$$= 1 + 1 + a = 2 + a.$$

Egalitatea (2) astfel dedusă pe cale pur analitică din egalitatea (1) nu este totuși un simplu caz particular: ea este altceva.

Deci, nu se poate chiar spune că în partea realmente analitică și deductivă a raționamentelor matematice se procedează de la general la particular, în sensul obișnuit al cuvîntului.

Cei doi termeni ai egalității (2) sînt doar combinații mai complicate decît cei doi termeni ai egalității (1), iar analiza nu servește decît la separarea elementelor care intră în aceste combinații și la studierea raporturilor lor.

Matematicienii procedează deci „prin construcție", ei „construiesc" combinații din ce în ce mai complicate. Revenind apoi, prin analiza acestor combinații, a acestor ansambluri — pentru a spune astfel — la elementele lor primitive, ei descoperă raporturile dintre aceste elemente și deduc de aici raporturile dintre ansamblurile înseși.

Este vorba aici de un demers pur analitic, care nu e însă unul de la general la particular, căci ansamblurile, evident, nu ar putea fi privite ca mai particulare decît elementele lor.

S-a acordat, și pe drept cuvînt, o mare importanță acestui procedeu al „construcției" și s-a susținut că aici se află condiția necesară și suficientă a progreselor științelor exacte.

Necesară, fără îndoială, dar suficientă, nu.

Pentru ca o construcție să poată fi utilă, pentru ca ea să nu fie o oboseală zadarnică pentru spirit, pentru ca ea să poată servi de treaptă celui care vrea să se ridice și mai sus, trebuie mai întîi ca ea să posede un fel de unitate, care să permită să se vadă aici altceva decît juxtapunerea elementelor sale.

Sau, mai exact, trebuie să se găsească acel avantaj de a considera mai degrabă construcția decît elementele sale.

Care poate fi acest avantaj?

Pentru ce să raționezi asupra unui poligon, de exemplu, care poate fi descompus în triunghiuri, și nu asupra triunghiurilor elementare?

Pentru că există proprietăți pe care le putem demonstra pentru poligoanele cu un număr oarecare de laturi și pe care le putem apoi aplica imediat unui poligon particular oarecare.

Cel mai adesea, din contră, doar cu prețul unor mari eforturi am putea regăsi proprietățile studiind direct raporturile triunghiurilor elementare. Cunoașterea teoremei generale ne cruță aceste eforturi.

O construcție nu devine deci interesantă decît atunci cînd poate fi rînduită alături de alte construcții analoage, care formează speciile unui aceluiași gen.

Dacă patrulaterul este altceva decît juxtapunerea a două triunghiuri, aceasta se datorește faptului că el aparține genului poligon.

Mai trebuie să se poată demonstra proprietățile genului fără a fi forțați de a le stabili în mod succesiv pentru fiecare dintre specii.

Pentru a reuși, trebuie în mod necesar să ne reîntoarcem de la particular la general, parcurgînd una sau mai multe trepte.

Procedeul analitic „prin construcție" nu ne obligă să coborîm, dar el ne lasă la același nivel.

Nu putem să ne ridicăm decît prin inducția matematică, singura care poate să ne învețe ceva nou. Fără ajutorul acestei inducții, diferită în anumite privințe de inducția fizică, dar fecundă ca și ea, construcția ar fi neputincioasă să creeze știința.

Să observăm, în încheiere, că această inducție nu este posibilă decît dacă o aceeași operație poate să se repete în mod indefinit. Pentru acest motiv teoria jocului de șah nu va putea să devină niciodată o știință, pentru că diferitele mutări dintr-o aceeași partidă nu se aseamănă.

Capitolul II

Mărimea matematică și experiența

Dacă vrem să știm ce înțeleg matematicienii printr-un continuu, nu trebuie să întrebăm geometria. Geometrul caută totdeauna, mai mult sau mai puțin, să-și reprezinte figurile pe care le studiază, dar reprezentările sale nu sînt pentru el decît instrumente; el face geometrie cu întinderea tot așa cum face cu creta; de aceea trebuie avut grijă de a nu se acorda prea multă atenție unor accidente care nu au adeseori mai multă importanță decît culoarea albă a cretei.

Analistului pur nu îi este teamă de această primejdie. El a degajat știința matematică de toate elementele străine și poate să răspundă la întrebarea noastră: Ce este exact acest continuu asupra căruia raționează matematicienii? Mulți dintre ei, care știu să reflecteze asupra artei lor, au răspuns deja; de exemplu, Tannery, în lucrarea sa *Introduction à la Théorie des Fonctions d'une variable* (Introducere la teoria funcțiilor de o variabilă).

Să plecăm de la scara numerelor întregi; între două trepte consecutive să intercalăm una sau mai multe trepte, apoi, între acestea, trepte noi, din nou altele și așa mai departe, indefinit. Vom avea astfel un număr nelimitat de termeni; vor fi numerele care sînt denumite fracționare, raționale sau comensurabile. Dar aceasta nu e de ajuns; între acești termeni, care sînt deja în număr infinit, trebuie să intercalăm alții, care sînt numiți irațional sau incomensurabili.

Înainte de a merge mai departe, să facem o primă remarcă. Continuul astfel conceput nu mai este decît o colecție de indivizi aranjați într-o anumită ordine, în număr infinit, este adevărat, dar *exteriori* unii altora. Nu aceasta este concepția obișnuită, în care se presupune între elementele

continuului un fel de legătură intimă care face din ele un tot, în care nu punctul preexistă liniei, ci linia punctului. Din celebra formulă, continuul este unitatea în multiplicitate, singură multiplicitatea subzistă, unitatea a dispărut. Analiștii nu au mai puțină dreptate de a defini continuul așa cum o fac, pentru că totdeauna ei au raționat asupra acestuia făcînd mare caz de rigoarea lor. Este însă suficient acest lucru pentru a ne avertiza că veritabilul continuu matematic este cu totul altceva decît acela al fizicienilor și acela al metafizicienilor.

Se va spune, poate, de asemenea, că matematicienii care se mulțumesc cu această definiție sînt înșelați de cuvinte, că ar trebui să se arate cu precizie ce este ficcare dintre aceste trepte intermediare, să se explice cum trebuie să le intercalăm și să demonstrăm că este posibil să facem aceasta. Dar ar fi greșit; singura proprietate a acestor trepte, care intervine în raționamentele lor [2], este aceea de a se găsi înainte sau după alte atari trepte; ea trebuie, deci, singură să intervină în definiție.

Astfel, nu trebuie să ne neliniștim în privința modului în care urmează să plasăm termenii intermediari; pe de altă parte, nimeni nu se va îndoi că această operație este posibilă, în afară numai de faptul dacă uităm că acest ultim cuvînt, în limbajul geometrilor, semnifică numai „lipsit de contradicție".

Definiția noastră, totuși, nu este completă încă, și revin asupra ei după această lungă digresiune.

Definiția incomensurabilelor. — Matematicienii din Școala de la Berlin, Kronecker în special, s-au preocupat să construiască scara con-

[2] Împreună cu acelea care sînt conținute în convențiile speciale ce servesc la definirea adunării și despre care vom vorbi mai departe.

tinuă a numerelor fracționare și irațională fără a se servi de alte materiale decît de numărul întreg. Continuul matematic ar fi, după acest mod de a vedea, o pură creație a spiritului, în care experiența nu ar avea nici o contribuție.

Părîndu-li-se că noțiunea de număr rațional nu prezintă dificultăți, ei s-au străduit mai ales să definească numărul incomensurabil. Dar mai înainte de a reproduce aici definiția lor, trebuie să fac o observație, pentru a preveni uimirea pe care ea o poate provoca cititorilor puțin familiarizați cu deprinderile geometrilor.

Matematicienii nu studiază obiecte, ci relații între obiecte; lor le este deci indiferent dacă înlocuiesc aceste obiecte cu altele, cu condiția ca relațiile să nu se schimbe. Materia nu are importanță pentru ei, singură forma îi interesează.

Dacă nu ne-am aminti de cele de mai sus, nu am înțelege faptul că Dedekind indică prin termenul *număr incomensurabil* un simplu simbol, adică ceva foarte diferit de ideea pe care credem că ne-o facem despre o cantitate, care trebuie să fie măsurabilă și aproape tangibilă.

Iată acum care este definiția lui Dedekind:

Numerele comensurabile pot fi repartizate în două clase într-o infinitate de moduri, supunîndu-se condiției ca un număr oarecare din prima clasă să fie mai mare decît un număr oarecare din clasa a doua.

Se poate întîmpla ca, printre numerele din prima clasă, să existe unul care să fie mai mic decît toate celelalte; dacă, de exemplu, se plasează în prima clasă toate numerele mai mari decît 2 și 2 însuși, iar în cea de-a doua clasă toate numerele mai mici decît 2, este limpede că 2 va fi cel mai mic dintre toate numerele din prima clasă. Numărul 2 va putea fi ales ca simbol al acestei repartiții.

Se poate întîmpla, din contră, ca, printre numerele din clasa a doua, să existe unul care să

fie mai mare decît toate celelalte; ceea ce are loc, de exemplu, în cazul în care prima clasă cuprinde toate numerele mai mari decît 2, iar a doua toate numerele mai mici decît 2 și însuși 2. Aici, de asemenea, numărul 2 va putea fi ales ca simbol al acestei repartiții.

Dar se poate întîmpla, de asemenea, să nu poată fi găsit nici în prima clasă un număr mai mic decît toate celelalte, nici în a doua clasă un număr mai mare decît toate celelalte. Să presupunem, de exemplu, că se plasează în prima clasă toate numerele comensurabile al căror pătrat este mai mare decît 2 și în a doua toate acelea al căror pătrat este mai mic decît 2. Se știe că nu există nici un număr al cărui pătrat să fie precis egal cu 2. Nu va fi, evident, în prima clasă un număr mai mic decît toate celelalte, căci oricît de vecin ar fi de 2 pătratul unui număr, se va putea găsi totdeauna un număr comensurabil al cărui pătrat să fie și mai apropiat de 2.

După opinia lui Dedekind, numărul incomensurabil

$$\sqrt{2}$$

nu este altceva decît simbolul acestui mod particular de repartiție a numerelor comensurabile; și fiecărui mod de repartiție îi corespunde astfel un număr comensurabil sau nu, care îi servește de simbol.

Dar a ne mulțumi cu aceasta, ar însemna să uităm prea mult originea acestor simboluri; rămîne de explicat cum am fost determinați să le atribuim acestora un fel de existență concretă; pe de altă parte, nu începe oare dificultatea cu numerele fracționare înseși? Am fi avut noi noțiunea acestor numere dacă nu am fi cunoscut dinainte o materie pe care o concepem ca divizibilă la infinit, adică asemenea unui continuu?

Continuul fizic. — Ajungem atunci să ne întrebăm dacă noțiunea de continuu matematic nu este scoasă, foarte simplu, din experiență.

Dacă ar fi astfel, datele brute ale experienței, care sînt senzațiile noastre, ar fi susceptibile de măsurare. Am putea fi tentați să credem că este într-adevăr așa, pentru că, în ultima vreme, s-au depus eforturi pentru a le măsura și pentru că s-a formulat chiar o lege, cunoscută sub numele de legea lui Fechner, după care senzația ar fi proporțională cu logaritmul excitației.

Dar dacă examinăm de aproape experiențele care au condus la această lege, vom ajunge la o concluzie cu totul contrarie. S-a observat, de exemplu, că o greutate A de 10 grame și o greutate B de 11 grame produc senzații identice, că greutatea B nu poate nici ea să fie deosebită de o greutate C de 12 grame, dar că se distinge cu ușurință greutatea A de greutatea C. Rezultatele brute ale experienței pot deci să fie exprimate prin relațiile următoare:

$$A = B, \quad B = C, \quad A < C,$$

care pot fi privite ca formula continuului fizic.

Există în cele de mai sus un dezacord intolerabil cu principiul contradicției, și necesitatea de a-l face să înceteze este cea care ne-a constrîns să inventăm continuul matematic.

Sîntem deci forțați să conchidem că această noțiune a fost creată cu totul de către spirit, dar că experiența este cea care i-a procurat ocazia.

Nu putem crede că două cantități egale cu o a treia nu sînt egale între ele, și astfel sîntem conduși să presupunem că A este diferit de B și B de C, dar că imperfecția simțurilor noastre nu ne-a permis să le deosebim.

Crearea continuului matematic. — *Primul stadiu.*

Pînă aici ar putea să ne fie suficient, pentru a analiza faptele, să intercalăm între A și B un mic număr de termeni care ar rămîne discreți. Ce se întîmplă însă dacă recurgem la un instrument care să suplinească infirmitatea simțurilor

noastre, dacă, de exemplu, ne folosim de un microscop? Termenii pe care nu puteam să-i deosebim unul de altul, cum erau adîncauri A și B, ne apar acum ca distincți; dar între A și B deveniți distincți se va intercala un termen nou D, pe care nu îl vom putea distinge nici de A, nici de B. Cu toată utilizarea celor mai perfecționate metode, rezultatele brute ale experienței noastre vor prezenta totdeauna caracterele continuului fizic, cu contradicția care îi este inerentă.

Nu vom scăpa din această situație decît intercalînd fără încetare termeni noi între termenii deja recunoscuți distincți, iar o astfel de operație va trebui continuată în mod indefinit. Nici nu am putea concepe să o oprim, decît dacă ne-am reprezenta un instrument destul de puternic pentru a descompune continuul fizic în elemente discrete, așa cum telescopul descompune calea lactee în stele. Dar nu ne putem imagina așa ceva; într-adevăr, totdeauna ne servim de instrumente cu simțurile noastre; cu ochii observăm imaginea mărită de microscop, și această imagine, prin urmare, trebuie ca totdeauna să păstreze caracterele senzației vizuale și, în consecință, acelea ale continuului fizic.

Nimic nu distinge o lungime observată direct de jumătatea acestei lungimi dublată de microscop. Totul este omogen cu partea, aceasta este o nouă contradicție sau, mai degrabă, ar fi una dacă numărul termenilor ar fi presupus finit; este limpede, într-adevăr, că partea conținînd mai puțini termeni decît totul nu ar putea fi asemănătoare totului.

Contradicția încetează din momentul în care numărul termenilor este privit ca infinit; nimic nu ne împiedică, de exemplu, să considerăm mulțimea numerelor întregi ca asemănătoare cu mulțimea numerelor pare, care nu este totuși decît o parte din cea dîntîi; și, într-adevăr, fie-

cărui număr întreg îi corespunde un număr par care este dublul său.

Dar nu numai pentru a scăpa de această contradicție conținută în datele empirice a fost determinat intelectul să creeze conceptul unui continuu, format dintr-un număr indefinit de termeni.

Totul se petrece ca în cazul șirului numerelor întregi. Noi avem facultatea de a concepe că o unitate poate fi adăugată unei colecții de unități; grație experienței avem noi ocazia de a exercita această facultate și de a deveni conștienți de ea; dar, din acest moment, simțim că puterea noastră nu are limite și că am putea număra în mod indefinit, deși nu am avut niciodată de numărat decît un număr finit de obiecte.

La fel, de îndată ce am fost conduși să intercalăm termeni medii între doi termeni consecutivi ai unei serii, simțim că această operație poate fi continuată dincolo de orice limită și că nu există, pentru a spune astfel, nici o rațiune intrinsecă de a ne opri.

Să mi se permită, pentru a scurta expunerea, să denumesc continuu matematic de ordinul întîi orice mulțime de termeni formați după aceeași lege ca și scara numerelor comensurabile. Dacă intercalăm apoi, în acest continuu, trepte noi, după legea de formare a numerelor incomensurabile, vom obține ceea ce vom denumi un continuu de ordinul al doilea.

Stadiul al doilea. — Pînă aici nu am făcut decît un prim pas; am explicat originea continuurilor de ordinul întîi; va trebui însă să vedem acum pentru ce aceste continuuri nu sînt suficiente și pentru ce a fost nevoie să inventăm numerele incomensurabile.

Dacă vrem să ne imaginăm o linie, nu o vom putea face decît cu caracterele continuului fizic, adică nu ne-o vom putea reprezenta decît cu o anumită lățime. În felul acesta, două linii ne

vor apărea sub forma a două benzi strîmte, și, dacă ne mulțumim cu această imagine grosieră, este evident că, dacă cele două linii se intersectează, vor avea o parte comună.

Însă geometrul pur face un efort în plus: fără a renunța cu totul la ajutorul simțurilor, el vrea să ajungă la conceptul liniei fără lățime, al punctului fără întindere. El nu poate să-și ajungă scopul decît considerînd linia ca limita către care tinde o bandă din ce în ce mai subțire, iar punctul ca limita către care tinde o suprafață din ce în ce mai mică. Și atunci, cele două benzi ale noastre, oricît de strîmte ar fi ele, vor avea totdeauna o suprafață comună cu atît mai mică cu cît ele vor fi mai puțin late și a cărei limită va fi ceea ce geometrul pur denumește un punct.

De aceea se spune că două linii care se intersectează au un punct comun și acest adevăr pare intuitiv.

Dar acest adevăr ar implica o contradicție dacă am concepe liniile drept continuuri de ordinul întîi, adică dacă pe liniile trasate de geometru nu ar trebui să se găsească decît puncte avînd drept coordonate numere raționale. Contradicția ar fi manifestă de îndată ce s-ar afirma, de exemplu, existența dreptelor și a cercurilor.

Este limpede, într-adevăr, că, dacă punctele, ale căror coordonate sînt comensurabile, ar fi singurele privite ca reale, cercul înscris într-un pătrat și diagonala acestui pătrat nu s-ar întretăia, deoarece coordonatele punctului de intersecție sînt incomensurabile.

Și aceasta nu ar fi suficient, întrucît astfel nu am avea decît anumite numere incomensurabile, iar nu toate.

Să ne reprezentăm o dreaptă divizată în două semidrepte. Fiecare dintre aceste semidrepte ne va apărea în imaginație ca o bandă de o anumită lățime; aceste benzi se vor încălca una pe alta, pentru că între ele nu trebuie să

existe nici un interval. Partea comună ne va apărea ca un punct care va subzista atunci cînd vom vrea să ne imaginăm benzile noastre din ce în ce mai subțiri, astfel încît vom admite ca un adevăr intuitiv că dacă o dreaptă este împărțită în două semidrepte, frontiera comună a acestor două drepte este un punct; recunoaștem aici concepția lui Kronecker, în care un număr incomensurabil era privit ca frontiera comună a două clase de numere raționale.

Aceasta este originea continuului de ordinul al doilea, care este continuul matematic propriu-zis.

Rezumat. — În rezumat, spiritul are facultatea de a crea simboluri, și astfel el a construit continuul matematic, care nu este decît un sistem particular de simboluri. Puterea sa este limitată doar de necesitatea de a evita orice contradicție; dar spiritul nu uzează de ea decît dacă experiența îi procură un motiv.

În cazul care ne preocupă, motivul a fose noțiunea continuului fizic, obținută din datelt brute ale simțurilor.

Această noțiune conduce la o serie de contradicții de care trebuie să ne eliberăm în mod succesiv. Așa încît sîntem constrînși să imaginăm un sistem de simboluri din ce în ce mai complicat. Acela la care ne vom opri trebuie să fie nu numai lipsit de orice contradicție internă — el era deja astfel în etapele pe care le-am parcurs — ci și de orice contradicție cu diverse propoziții zise intuitive, care sînt scoase din noțiuni empirice mai mult sau mai puțin elaborate.

Mărimea măsurabilă. — Mărimile pe care le-am studiat pînă aici nu sînt *măsurabile;* noi putem foarte bine să spunem dacă una dintre aceste mărimi este mai mare decît alta, dar nu putem spune dacă ea este de două ori sau de trei ori mai mare.

Într-adevăr, eu nu m-am preocupat, pînă aici, decît de ordinea în care sînt aranjați termenii. Dar aceasta nu este de ajuns pentru cea mai mare parte dintre aplicații. Trebuie să învățăm să comparăm intervalul care separă doi termeni oarecare. Numai cu această condiție continuul devine o mărime măsurabilă și i se pot aplica operațiile aritmetice.

Un astfel de lucru nu se poate face decît cu ajutorul unei *convenții* noi și speciale. Se *va conveni* că în cutare caz intervalul cuprins între termenii A și B este egal cu intervalul care separă C și D. De exemplu, la începutul lucrării noastre, am plecat de la scara numerelor întregi și am presupus că se intercalau între două trepte consecutive n trepte intermediare; ei bine, aceste trepte noi vor fi privite prin convenție ca echidistante.

Avem aici un mod de a defini adunarea a două mărimi; căci dacă intervalul AB este prin definiție egal cu intervalul CD, intervalul AD va fi prin definiție suma intervalelor AB și CD.

Această definiție este arbitrară într-o foarte mare măsură. Totuși ea nu este complet arbitrară. Ea este supusă anumitor condiții și, de exemplu, regulilor de comutativitate și de asociativitate ale adunării. Dar, în afara condiției ca definiția aleasă să satisfacă aceste reguli, alegerea este indiferentă; este inutil să precizăm acest lucru.

Cîteva remarci. — Putem să ne punem mai multe întrebări importante:

1. Este oare epuizată puterea creatoare a spiritului prin crearea continuului matematic?

Nu: lucrările lui Du Bois-Reymond o demonstrează din plin.

Se știe că matematicienii disting mărimi infinitezimale de diferite ordine și că acelea de ordinul al doilea sînt infinit mici nu numai în mod absolut, ci și în raport cu acelea de ordinul întîi.

Nu este greu să ne imaginăm mărimi infinitezimale de ordin fracționar sau chiar irațional, regăsind astfel scara continuului matematic care a constituit obiectul paginilor precedente.

Mai mult! Există mărimi infinitezimale care sînt infinit mici în raport cu acelea de ordinul întîi și infinit mari, din contră, în raport cu acelea de ordinul $1 + \varepsilon$, și aceasta oricît de mic ar fi ε. Iată deci termeni noi intercalați în seria noastră, și dacă mi se permite să revin la limbajul pe care l-am folosit adineauri și care este destul de comod, cu toate că nu este consacrat de practică, voi spune că s-a creat astfel un gen de continuu de ordinul al treilea.

Ar fi ușor de mers mai departe, dar ar însemna un joc zadarnic al spiritului; nu s-ar imagina decît simboluri fără o aplicație posibilă, și nimeni nu le-ar primi bine. Continuul de ordinul al treilea la care conduce considerarea diverselor ordine de mărimi infinitezimale este el însuși prea puțin util pentru a i se acorda drept de cetate, iar geometrii îl privesc ca pe o simplă curiozitate. Spiritul nu se folosește de facultatea sa creatoare decît atunci cînd experiența îi impune necesitatea.

2. Odată aflați în posesia conceptului de continuu matematic, sîntem oare la adăpost de contradicții analoage celor care i-au dat naștere?

Nu, și voi da un exemplu.

Trebuie să fii neapărat savant pentru a nu considera ca evident că orice curbă are o tangentă: și, într-adevăr, dacă ne reprezentăm această curbă și o dreaptă ca două benzi strîmte, se va putea să le dispunem totdeauna în așa fel încît să aibă o parte comună fără a se intersecta. Să ne imaginăm apoi cum lățimea acestor două benzi se micșorează în mod indefinit; această parte comună va putea să subziste mereu și, la limită, pentru a spune astfel, cele două linii vor avea

un punct comun fără a se intersecta, adică ele se vor atinge.

Geometrul care ar raționa astfel, în mod conștient sau nu, nu ar face altceva decît ceea ce am făcut noi mai sus pentru a demonstra că două linii care se intersectează au un punct comun, iar intuiția sa ar putea să apară de asemenea legitimă.

Ea l-ar înșela totuși. Se poate demonstra că există curbe care nu au tangentă, dacă această curbă este definită ca un continuu analitic de ordinul al doilea.

Fără îndoială, un artificiu analog cu acelea pe care le-am studiat mai sus ar fi permis să se înlăture contradicția; dar, cum aceasta nu se întîlnește decît în cazuri cu totul excepționale, pe geometri nu i-a preocupat chestiunea. În loc de a căuta să împace intuiția cu analiza, s-au mulțumit să sacrifice una din două, și cum analiza trebuie să rămînă impecabilă, au dat vina pe intuiție.

Continuul fizic cu mai multe dimensiuni. — Am studiat mai sus continuul fizic așa cum reiese el din datele imediate ale simțurilor noastre, sau, dacă vrem, din rezultatele brute ale experiențelor lui Fechner; am arătat că aceste rezultate sînt rezumate în formulele contradictorii:

$$A = B,\ B = C,\ A < C.$$

Să vedem acum în ce mod s-a generalizat această noțiune și cum a putut să rezulte din ea conceptul continuurilor cu mai multe dimensiuni.

Să considerăm două ansambluri oarecare de senzații. Sau vom putea să le deosebim unul de altul, sau nu le vom putea deosebi, la fel ca în experiențele lui Fechner, în care o greutate de 10 grame putea să se deosebească de o greutate de 12 grame, dar nu de o greutate de 11 grame. Nu am nevoie de altceva pentru a construi continuul cu mai multe dimensiuni.

Denumim *element* unul dintre aceste ansambluri de senzații. Va fi ceva analog cu *punctul* matematicienilor; totuși, nu e cu totul același lucru. Nu putem spune că elementul nostru este fără întindere, pentru că noi nu putem să-l distingem de elementele vecine, fiind înconjurat de un fel de ceață. Dacă mi se îngăduie o comparație astronomică, „elementele" noastre ar fi ca niște nebuloase, în timp ce punctele matematice ar fi ca niște stele.

Acestea fiind stabilite, un sistem de elemente va forma un *continuu*, dacă se poate trece de la un element oarecare la un altul, printr-o serie de elemente consecutive înlănțuite în așa mod, încît fiecare dintre ele să nu poată să se deosebească de precedentul. Acest *lanț* este față de *linia* matematicianului ceea ce un *element* izolat era față de punct.

Înainte de a merge mai departe, trebuie să explic ceea ce este o *tăietură*. Să considerăm un continuu C și să înlăturăm unele dintre elementele sale pe care, pentru moment, le vom privi ca nemaiaparținînd acestui continuu. Mulțimea elementelor astfel înlăturate se va numi o tăietură. Se va putea întîmpla ca, datorită acestei tăieturi, C să fie *subdivizat* în mai multe continuuri distincte, mulțimea elementelor rămase încetînd de a forma un continuu unic.

Atunci pe C vor fi două elemente, A și B, pe care va trebui să le privim ca aparținînd la două continuuri distincte și vom recunoaște aceasta întrucît va fi imposibil să găsim un *lanț* de elemente consecutive ale lui C pornind din A și mergînd în B, fiecare element fiind indiscernabil de precedentul, *afară numai dacă unul dintre elementele acestui lanț nu este indiscernabil față de unul dintre elementele tăieturii și nu trebuie, prin urmare, să fie exclus.*

Se va putea întîmpla, din contră, ca tăietura stabilită să fie insuficientă pentru a subdivide

continuul C. Pentru a clasifica continuurile fizice, vom examina tocmai care sînt tăieturile pe care este necesar să le facem pentru a le subdivide.

Dacă se poate subdivide un continuu fizic C printr-o tăietură care se reduce la un număr finit de elemente, toate discernabile unele față de altele (și neformînd, prin urmare, nici un continuu, nici mai multe continuuri), vom spune că C este un continuu *cu o dimensiune*.

Dacă, din contră, C nu poate fi subdivizat decît prin tăieturi care sînt ele însele continuuri, vom spune că C are mai multe dimensiuni, Dacă nu este nevoie decît de tăieturi care sînt continuuri cu o dimensiune, vom spune că C are două dimensiuni; dacă nu este nevoie decît de tăieturi cu două dimensiuni, vom spune că C are trei dimensiuni, și așa mai departe.

Astfel, noțiunea continuului fizic cu mai multe dimensiuni este definită grație faptului foarte simplu că două ansambluri de senzații pot fi discernabile sau indiscernabile.

Continuul matematic cu mai multe dimensiuni. — Noțiunea continuului matematic cu n dimensiuni a rezultat foarte firesc printr-un proces cu totul asemănător aceluia pe care l-am studiat la începutul acestui capitol. Un punct al unui asemenea continuu ne apare, după cum se știe, ca definit de un sistem de n mărimi distincte pe care le denumim coordonatele sale.

Nu este totdeauna necesar ca aceste mărimi să fie măsurabile, existînd chiar o ramură a geometriei în care se face abstracție de măsurarea acestor mărimi și în care există numai preocuparea de a se ști, de exemplu, dacă, pe o curbă ABC, punctul B este între punctele A și C, și nu de a se ști dacă arcul AB este egal cu arcul BC sau dacă el este de două ori mai mare. Este ceea ce se numește *Analysis Situs*.

Este vorba de un întreg corp de doctrină care a atras atenția celor mai mari geometri și

în care se văd rezultînd unele din altele o serie de teoreme remarcabile. Ceea ce deosebește aceste teoreme de acelea din geometria obișnuită este faptul că ele sînt pur calitative și că ar rămîne adevărate dacă figurile ar fi copiate de un desenator neîndemînatec care ar modifica în mod grosolan proporțiile și ar înlocui dreptele printr-o linie mai mult sau mai puțin curbă.

Cînd s-a vrut să se introducă măsura în continuul pe care l-am definit mai sus, atunci acest continuu a devenit spațiul și geometria a luat naștere. Dar îmi rezerv acest studiu pentru partea a doua.

Partea a doua

Spațiul

Capitolul III

Geometriile neeuclidiene

Orice concluzie presupune premise; aceste premise sînt sau evidente prin ele însele și nu au nevoie de demonstrație, sau nu pot fi stabilite decît sprijinindu-se pe alte propoziții, dar, întrucît nu ne putem întoarce așa la infinit, orice știință deductivă, și în special geometria, trebuie să se întemeieze pe un anumit număr de axiome indemonstrabile. Toate tratatele de geometrie încep deci prin enunțul acestor axiome. Însă trebuie făcută între ele o distincție; unele, ca, de exemplu, aceasta: „două cantități egale cu o a treia sînt egale între ele", nu sînt propoziții de geometrie, ci propoziții de analiză. Eu le consider judecăți analitice *a priori* și nu mă voi ocupa de ele.

Trebuie să insist însă asupra altor axiome, care sînt specifice geometriei. Cele mai multe dintre tratate enunță trei în mod explicit:

1. Prin două puncte nu poate trece decît o dreaptă.

2. Linia dreaptă este drumul cel mai scurt dintre două puncte.

3. Printr-un punct nu se poate duce decît o paralelă la o dreaptă dată.

Deși geometrii se dispensează, în general, de demonstrația celei de-a doua dintre aceste axiome, e posibil ca ea să fie dedusă din celelalte două și din acelea, mult mai numeroase, pe care le admitem

în mod implicit, fără a le enunța, așa cum voi explica mai departe.

S-a căutat în zadar, de asemenea, multă vreme să se demonstreze cea de-a treia axiomă, cunoscută sub numele de *postulatul lui Euclid*. Cîte eforturi s-au cheltuit în această speranță himerică este inimaginabil. În fine, la începutul secolului al XIX-lea și aproape în același timp, doi savanți, un rus și un ungur, Lobacevski și Bolyai, au stabilit într-un mod ce nu poate fi combătut că această demonstrație este imposibilă; ei ne-au scăpat aproape de inventatorii de geometrii fără postulat; de atunci Academia de Științe din Paris nu mai primește decît una sau două demonstrații noi pe an.

Chestiunea nu era epuizată; ea nu a întîrziat să facă un mare pas înainte prin publicarea celebrului memoriu al lui Riemann, intitulat: *Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zum Grunde liegen* (Despre ipotezele care stau la baza geometriei). Acest opuscul a inspirat cea mai mare parte dintre lucrările recente despre care voi vorbi mai departe și printre care se cuvine să citățm pe acelea ale lui Beltrami și Helmholtz.

Geometria lui Lobacevski. — Dacă ar fi posibil să deducem postulatul lui Euclid din alte axiome, s-ar ajunge, evident, ca, negînd postulatul și admițînd celelalte axiome, să fim conduși la consecințe contradictorii; ar fi deci imposibil să fundamentăm pe atari premise o geometrie coerentă.

Or, acest lucru este tocmai ceea ce a făcut Lobacevski. El a presupus la început că:

Printr-un punct se pot duce mai multe paralele la o dreaptă dată.

În rest, el păstrează toate celelalte axiome ale lui Euclid. Din aceste ipoteze, el deduce un șir de teoreme printre care este imposibil să fie relevată vreo contradicție și construiește o geometrie

a cărei logică impecabilă nu e întru nimic inferioară celei a geometriei euclidiene.

Teoremele sînt, bineînțeles, foarte diferite de acelea cu care sîntem obișnuiți și au darul de a ne descumpăni puțin la început.

Astfel, suma unghiurilor unui triunghi este totdeauna mai mică decît două unghiuri drepte și diferența dintre această sumă și două unghiuri drepte este proporțională cu suprafața triunghiului.

Este imposibil să se construiască o figură asemenea cu o figură dată, dar de dimensiuni diferite.

Dacă se divide o circumferință în n părți egale și se duc tangente la punctele de diviziune, aceste n tangente vor forma un poligon, dacă raza circumferinței este destul de mică; dar dacă această rază este destul de mare, ele nu se vor întîlni.

Este inutil să sporim numărul exemplelor; propozițiile lui Lobacevski nu mai au nici un raport cu acelea ale lui Euclid, dar ele nu sînt mai puțin logic legate unele de altele.

Geometria lui Riemann. — Să ne imaginăm o lume populată numai de ființe lipsite cu totul de grosime; și să presupunem că aceste animale „infinit plate" se află toate într-un același plan, neputînd ieși din el. Să admitem în plus că această lume este destul de îndepărtată de altele pentru a fi sustrasă influenței lor. Pentru că sîntem pe făgașul construirii de ipoteze, nu ne este greu să dotăm aceste ființe cu raționament și să le credem capabile de a se ocupa cu geometria. În acest caz, ele nu vor atribui cu siguranță spațiului decît două dimensiuni.

Dar să presupunem acum că aceste animale imaginare, rămînînd mai departe lipsite cu totul de grosime, au forma unei figuri sferice, iar nu a unei figuri plane, și sînt toate pe o aceeași sferă fără a se putea îndepărta de aceasta. Ce geometrie vor putea construi ele? Este limpede,

mai întîi, că ele nu vor atribui spațiului decît două dimensiuni; ceea ce va deține pentru ele rolul liniei drepte, va fi cel mai scurt drum de la un punct la altul pe sferă, adică un arc de cerc mare, într-un cuvînt, geometria lor va fi geometria sferică.

Ceea ce ele vor numi spațiu va fi această sferă din care ele nu pot ieși și pe care se petrec toate fenomenele despre care ele pot să aibă cunoștință. Spațiul lor va fi deci *fără limite* pentru că, pe o sferă, se poate merge totdeauna înainte fără a fi oprit vreodată, și totuși el va fi *finit;* nu i se va găsi niciodată capătul, dar i se va putea face înconjurul.

Ei bine, geometria lui Riemann este geometria sferică extinsă la trei dimensiuni. Pentru a o construi, matematicianul german a trebuit să arunce peste bord nu numai postulatul lui Euclid, ci și prima axiomă: *Prin două puncte nu se poate duce decît o dreaptă.*

Pe o sferă, prin două puncte date nu se poate duce *în general* decît un cerc mare (care, după cum am văzut mai sus, ar juca rolul liniei drepte pentru ființele noastre imaginare), însă există o excepție: dacă cele două puncte date sînt diametral opuse, se vor putea duce prin aceste două puncte o infinitate de cercuri mari.

La fel în geometria lui Riemann (cel puțin în una din formele sale), prin două puncte nu va trece în general decît o singură dreaptă; dar există cazuri excepționale, în care, prin două puncte vor putea trece o infinitate de drepte.

Există un fel de opoziție între geometria lui Riemann și aceea a lui Lobacevski.

Astfel, suma unghiurilor unui triunghi este:

Egală cu două unghiuri drepte în geometria lui Euclid.

Mai mică decît două unghiuri drepte în aceea a lui Lobacevski.

Mai mare decît două unghiuri drepte în aceea a lui Riemann.

Numărul paralelelor care pot fi duse la o dreaptă dată printr-un punct dat este egal:

Cu 1 în geometria lui Euclid.

Cu zero în aceea a lui Riemann.

Cu un număr infinit în aceea a lui Lobacevski.

Să adăugăm că spațiul lui Riemann este finit, deși fără limită, în sensul dat mai sus acestor două cuvinte.

Suprafețele cu curbură constantă. — O obiecție rămînea totuși posibilă. Teoremele lui Lobacevski și ale lui Riemann nu prezintă nici o contradicție; dar, oricît de numeroase ar fi consecințele pe care acești doi geometri le-au obținut din ipotezele lor, ei au trebuit să se oprească mai înainte de a le fi epuizat pe toate, căci numărul lor ar fi fost infinit; cine ne spune atunci că, dacă și-ar fi continuat deducțiile, ei nu ar fi sfîrșit prin a ajunge la vreo contradicție?

Această dificultate nu există pentru geometria lui Riemann, cu condiția să se mărginească la două dimensiuni; geometria lui Riemann cu două dimensiuni nu diferă, într-adevăr, după cum am văzut, de geometria sferică, care nu este decît o ramură a geometriei obișnuite și care, în consecință, e în afară de orice discuție.

E. Beltrami, reducînd, de asemenea, geometria lui Lobacevski cu două dimensiuni la situația de a nu mai fi decît o ramură a geometriei obișnuite, a combătut, în egală măsură, cu succes obiecția în ceea ce o privea.

Iată cum a reușit aceasta. Să considerăm pe o suprafață o figură oarecare. Să ne imaginăm că această figură este trasată pe o pînză flexibilă și inextensibilă aplicată pe această suprafață, astfel încît atunci cînd pînza se deplasează și se deformează, diversele linii ale acestei figuri să poată să-și schimbe forma, fără a-și schimba lungimea. În general, această figură flexibilă și

inextensibilă nu va putea să se deplaseze fără a părăsi suprafața respectivă; dar există anumite suprafețe particulare pentru care o asemenea mișcare ar fi posibilă: sînt suprafețele cu curbură constantă.

Dacă reluăm comparația pe care o făceam mai sus și ne-am imagina niște ființe fără grosime care trăiesc pe una dintre aceste suprafețe, ele vor privi ca posibilă mișcarea unei figuri ale cărei linii păstrează toate o lungime constantă. O asemenea mișcare ar părea absurdă, din contră, unor animale fără grosime care trăiesc pe o suprafață cu curbură variabilă.

Aceste suprafețe cu curbură constantă sînt de două feluri:

Unele sînt *cu curbură pozitivă* și pot fi deformate astfel încît să fie aplicate pe o sferă. Geometria acestor suprafețe se reduce, deci, la geometria sferică, care este aceea a lui Riemann.

Celelalte sînt *cu curbură negativă*. E. Beltrami a arătat că geometria acestor suprafețe nu este alta decît aceea a lui Lobacevski. Geometriile cu două dimensiuni — cea a lui Riemann și cea a lui Lobacevski — sînt astfel atașate geometriei euclidiene.

Interpretarea geometriilor neeuclidiene. — În acest mod dispare obiecția privind geometriile cu două dimensiuni.

Ar fi ușor de extins raționamentul lui E. Beltrami la geometriile cu trei dimensiuni. Cei pe care nu îi înspăimîntă spațiul cu patru dimensiuni nu vor vedea aici nici o dificultate, dar aceștia sînt puțin numeroși. Eu prefer deci să procedez în alt mod.

Să considerăm un anumit plan, pe care îl voi numi fundamental, și să construim un fel de dicționar, făcînd să corespundă, fiecare la fiecare, un șir dublu de termeni scriși pe două coloane, în același mod în care corespund reciproc în dic-

ționarele obișnuite cuvintele aparținînd la două limbi, a căror semnificație este aceeași:

Spațiu	Porțiune din spațiu situată deasupra planului fundamental.
Plan	Sferă tăind ortogonal planul fundamental.
Dreaptă	Cerc tăind ortogonal planul fundamental.
Sferă	Sferă.
Cerc	Cerc.
Unghi	Unghi.
Distanța dintre două puncte	Logaritmul raportului anarmonic al acestor două puncte și al intersecțiilor planului fundamental cu un cerc care trece prin aceste două puncte și pe care îl taie ortogonal.
etc.	etc.

Să luăm apoi teoremele lui Lobacevski și să le traducem cu ajutorul acestui dicționar așa cum am traduce un text german cu ajutorul unui dicționar german-francez. *Vom obține astfel teoreme din geometria obișnuită.*

De exemplu, teorema lui Lobacevski: „Suma unghiurilor unui triunghi este mai mică decît două unghiuri drepte" se traduce astfel: „Dacă un triunghi curbiliniu are drept laturi arcuri de cerc care, prelungite, ar tăia ortogonal planul fundamental, suma unghiurilor acestui triunghi curbiliniu va fi mai mică decît două unghiuri drepte" Astfel, oricît de departe s-ar împinge consecințele ipotezelor lui Lobacevski, nu vom fi niciodată conduși la o contradicție. Într-adevăr, dacă două teoreme ale lui Lobacevski ar fi contradictorii, același lucru s-ar întîmpla cu traducerile acestor două teoreme făcute cu ajutorul dicționarului nostru, dar aceste traduceri sînt teoreme de geometrie obișnuită și toată lumea știe că geometria obișnuită este lipsită de contradicție. De unde ne vine această certitudine? Este ea justificată? E o chestiune pe care nu aș putea s-o discut aici, întrucît ar necesita cîteva dezvoltări. Nu mai rămîne așadar nimic din obiecția pe care am formulat-o mai sus.

Dar aceasta nu este totul. Geometria lui Lobacevski, susceptibilă de o interpretare concretă, încetează de a fi un exercițiu van de logică, putînd avea aplicații; nu am timpul necesar să vorbesc aici despre aceste aplicații și nici despre avantajul pe care Felix Klein și cu mine l-am avut de pe urma acestor aplicații pentru integrarea ecuațiilor liniare.

Această interpretare nu este dealtminteri unică; s-ar putea stabili mai multe dicționare analoage celui precedent. S-ar permite astfel, printr-o simplă „traducere", să se transforme teoremele lui Lobacevski în teoreme de geometrie obișnuită.

Axiomele implicite. Sînt axiomele enunțate în mod explicit în tratate singurele temelii ale geometriei? Putem fi încredințați de contrariu văzînd că, după ce le-am abandonat în mod succesiv, rămîn în picioare cîteva propoziții comune teoriilor lui Euclid, Lobacevski și Riemann. Aceste propoziții trebuie să se bazeze pe cîteva premise pe care geometrii le admit fără a le enunța. Este interesant să căutăm să le desprindem din demonstrațiile clasice.

Stuart Mill a pretins că orice definiție conține o axiomă, pentru că, definind, se afirmă în mod implicit existența obiectului definit. Aceasta înseamnă să megem mult prea departe; se întîmplă rar ca în matematici să se dea o definiție fără a fi urmată de demonstrația existenței obiectului definit, iar cînd matematicienii se dispensează de ea, aceasta se datorește în general faptului că cititorul poate să o suplinească cu ușurință. Nu trebuie să uităm că termenul „existență" nu are același sens cînd este vorba de o ființă matematică și cînd este în cauză un obiect material. O ființă matematică există, cu condiția ca definiția ei să nu implice contradicție, fie în ea însăși, fie cu propozițiile admise anterior.

Dar dacă observația lui Stuart Mill nu ar putea să se aplice tuturor definițiilor, ea nu este mai puțin adevărată pentru cîteva dintre ele. Cîteodată planul este definit în modul următor:

Planul este o suprafață astfel încît dreapta care unește două puncte oarecare dintre punctele sale se află în întregime pe această suprafață.

Această definiție cuprinde în mod evident o nouă axiomă; s-ar putea, este adevărat, s-o schimbăm, și aceasta ar fi preferabil, dar atunci ar trebui să se enunțe axioma în mod explicit.

Alte definiții pot da loc la reflecții nu mai puțin importante.

Așa este, de pildă, definiția egalității a două figuri: două figuri sînt egale cînd pot fi suprapuse; pentru a le suprapune trebuie deplasată una dintre ele pînă ce aceasta coincide cu cealaltă; dar cum trebuie să o deplasăm? Ni s-ar răspunde, fără îndoială, că trebuie s-o deplasăm fără a o deforma, asemenea unui solid invariabil. Cercul vicios ar fi atunci evident.

În fapt, această definiție nu definește nimic; ea nu ar avea nici un sens pentru o ființă care ar locui într-o lume în care nu ar exista decît fluide. Dacă ea ni se pare clară, aceasta se datorește faptului că noi sîntem obișnuiți cu proprietățile solidelor naturale care nu diferă mult de acelea ale solidelor ideale, ale căror dimensiuni sînt invariabile.

Totuși, oricît de imperfectă ar fi această definiție, ea implică o axiomă.

Posibilitatea mișcării unei figuri invariabile nu este un adevăr evident prin el însuși, sau cel puțin el nu este decît în maniera postulatului lui Euclid și nu cum ar fi o judecată analitică *a priori*.

Dealtminteri, studiind definițiile și demonstrațiile geometriei, se constată că sîntem obligați să admitem, fără a le demonstra, nu numai

posibilitatea acestei mișcări, ci și cîteva din proprietățile sale.

Este ceea ce reiese mai întîi din definiția liniei drepte. Acesteia i s-au dat multe definiții defectuoase, veritabila definiție fiind cea care e subînțeleasă în toate demonstrațiile în care intervine linia dreaptă:

„Se poate ca mișcarea unei figuri invariabile să fie astfel, încît toate punctele unei linii aparținînd acestei figuri să rămînă imobile, în timp ce toate punctele situate în afara acestei linii să se miște. O asemenea linie se va numi o linie dreaptă" În acest enunț am separat intenționat definiția de axioma pe care ea o implică.

Multe demonstrații, cum ar fi acelea ale cazurilor de egalitate a triunghiurilor, ale posibilității de a coborî o perpendiculară dintr-un punct pe o dreaptă presupun propoziții pe care geometrii nu le mai enunță, pentru că ele obligă să se admită că este posibil să se transporte o figură în spațiu într-un anumit mod.

A patra geometrie. — Printre aceste axiome implicite, este una care mi se pare că merită o oarecare atenție, pentru că, abandonînd-o, se poate construi o a patra geometrie, tot atît de coerentă ca acelea ale lui Euclid, Lobacevski și Riemann.

Pentru a demonstra că se poate ridica totdeauna într-un punct A o perpendiculară pe o dreaptă AB, se consideră o dreaptă AC mobilă în jurul punctului A și care se confundă inițial cu dreapta fixă AB; facem să se rotească această dreaptă în jurul punctului A pînă ce ajunge să se afle în prelungirea lui AB.

Se presupun astfel două propoziții: mai întîi că o asemenea rotație este posibilă, și apoi că ea poate să se continue pînă cînd cele două drepte vin una în prelungirea celeilalte.

Dacă se admite primul punct și se respinge cel de-al doilea, sîntem conduși la un șir de teo-

reme și mai ciudate decît acelea ale lui Lobacevski și ale lui Riemann, dar, de asemenea, lipsite de contradicție.

Nu voi cita decît una dintre aceste teoreme și nu o voi alege pe cea mai bizară: *o dreaptă reală poate fi perpendiculară pe ea însăși.*

Teorema lui Lie. — Numărul axiomelor implicit introduse în demonstrațiile clasice este mai mare decît ar fi necesar, așa încît s-a căutat a-l reduce la minimum. D. Hilbert pare să fi dat soluția definitivă a acestei probleme. Se putea pune *a priori* întrebarea, mai întîi, dacă această reducere este posibilă, dacă numărul axiomelor necesare, ca și acela al geometriilor imaginabile nu este infinit.

O teoremă a lui Sophus Lie domină toată această discuție. Ea poate fi enunțată astfel:

Să presupunem că se admit premisele următoare:

1. Spațiul are n dimensiuni.
2. Mișcarea unei figuri invariabile este posibilă.
3. Trebuie p condiții pentru a determina poziția acestei figuri în spațiu.

Numărul geometriilor compatibile cu aceste premise va fi limitat.

Pot chiar să adaug că, dacă n este dat, se poate atribui lui p o limită superioară.

Dacă se admite, deci, posibilitatea mișcării, nu se va putea inventa decît un număr finit (și chiar destul de restrîns) de geometrii cu trei dimensiuni.

Geometriile lui Riemann. — Totuși acest rezultat pare a fi contrazis de Riemann, întrucît acest savant construiește o infinitate de geometrii diferite, iar aceea căreia i se dă de obicei numele său nu constituie decît un caz particular al lor.

Totul depinde, spune el, de modul în care se definește lungimea unei curbe. Or, există o infinitate de moduri de a defini această lungime, fie-

care dintre ele putînd deveni punctul de plecare al unei noi geometrii.

Acest lucru este perfect exact, dar cea mai mare parte dintre definiții sînt incompatibile cu mișcarea unei figuri invariabile, pe care o presupunem posibilă în teorema lui Lie. Aceste geometrii ale lui Riemann, atît de interesante sub diverse titluri, nu ar putea, așadar, niciodată să fie decît pur analitice și nu ar admite demonstrații analoage acelora ale lui Euclid.

Geometriile lui Hilbert. — În sfîrșit, Veronese și Hilbert au imaginat și mai ciudate noi geometrii, pe care ei le denumesc *ne-arhimedice*. Ei le construiesc respingînd *axioma lui Arhimede*, potrivit căreia orice lungime dată, multiplicată cu un număr întreg suficient de mare, va depăși orice altă lungime dată, oricît de mare ar fi ea. Pe o dreaptă ne-arhimedică, punctele din geometria noastră obișnuită există toate, dar sînt o infinitate de alte puncte care vin să se intercaleze între ele, astfel încît între două segmente, pe care geometrii din școala veche le-ar fi privit drept contigui, se pot plasa o infinitate de puncte noi. Într-un cuvînt, spațiul ne-arhimedic nu mai este un continuu de ordinul al doilea, pentru a întrebuința limbajul din capitolul precedent, ci un continuu de ordinul al treilea.

Despre natura axiomelor. — Cei mai mulți dintre matematicieni nu privesc geometria lui Lobacevski decît ca o simplă curiozitate logică; cîțiva dintre ei au mers totuși mai departe. Întrucît sînt posibile mai multe geometrii, este oare sigur că a noastră este cea adevărată? Experiența ne învață, fără îndoială, că suma unghiurilor unui triunghi este egală cu două unghiuri drepte; dar aceasta pentru că noi nu operăm decît pe triunghiuri prea mici; diferența, după Lobacevski, este proporțională cu suprafața

triunghiului: oare ea nu poate să devină sensibilă atunci cînd operăm pe triunghiuri mai mari sau cînd măsurătorile noastre vor deveni mai precise? Geometria euclidiană nu ar fi astfel decît o geometrie provizorie.

Pentru a discuta această opinie, va trebui mai întîi să ne întrebăm care este natura axiomelor geometrice.

Sînt acestea judecăți sintetice *a priori*, cum spunea Kant?

Ele ni s-ar impune atunci cu o asemenea forță, încît nu am putea concepe propoziția contrară, nici construirea pe aceasta a unui edificiu teoretic. Nu ar exista geometrie neeuclidiană.

Pentru a ne convinge de acest fapt, să se ia o veritabilă judecată sintetică *a priori*, de exemplu aceasta, al cărei rol preponderent l-am văzut în primul capitol:

Dacă o teoremă este adevărată pentru numărul 1, dacă s-a demonstrat că ea este adevărată pentru $n + 1$, cu condiția ca să fie adevărată pentru n, ea va fi adevărată pentru toate numerele întregi pozitive.

Să se încerce apoi de a o ocoli și de a funda, negînd această propoziție, o falsă aritmetică analoagă cu geometria neeuclidiană, — nu se va putea reuși; ar exista chiar tentația, la prima abordare, de a considera aceste judecăți drept analitice.

Dealtminteri, să reluăm ficțiunea noastră a animalelor fără grosime; nu putem admite deloc că aceste ființe, dacă au spiritul alcătuit ca al nostru, ar adopta geometria euclidiană, care ar fi contrazisă de întreaga lor experiență.

Trebuie deci să conchidem oare că axiomele geometriei sînt adevăruri ale experienței? Dar nu se experimentează pe drepte sau pe circumferințe ideale; nu se poate experimenta decît pe obiecte materiale. Pe ce s-ar sprijini deci expe-

rienţele care ar servi de fundament geometriei? Răspunsul este uşor.

Noi am văzut mai sus că se raţionează în mod constant ca şi cum figurile geometrice s-ar comporta în maniera solidelor. Ceea ce geometria ar împrumuta de la experienţă, ar fi deci proprietăţile acestor corpuri.

Proprietăţile luminii şi propagarea sa rectilinie au constituit de asemenea conjunctura din care au ieşit cîteva dintre propoziţiile geometriei, şi în special acelea ale geometriei proiective, astfel încît, din acest punct de vedere, am fi tentaţi să spunem că geometria metrică este studiul solidelor şi că geometria proiectivă este studiul luminii.

Dar o dificultate subzistă, şi ea este de neînvins. Dacă geometria ar fi o ştiinţă a experienţei, ea nu ar fi o ştiinţă exactă, ea ar fi supusă unei revizuiri continue. Dar ce spun eu? — ar fi imediat considerată ca greşită, pentru că ştim că nu există solid riguros invariabil.

Axiomele geometrice nu sînt, deci, nici judecăţi sintetice a priori, *nici fapte ale experienţei.*

Ele sînt *convenţii;* alegerea lor, dintre toate convenţiile posibile, este *călăuzită* de faptele experienţei; dar ea rămîne liberă şi nu este limitată decît de necesitatea de a evita orice contradicţie. Astfel, postulatele pot rămîne *riguros* adevărate chiar dacă legile experienţei care au determinat adoptarea lor nu sînt decît aproximative.

Cu alte cuvinte, *axiomele geometriei* (nu vorbesc de acelea ale aritmeticii) *nu sînt decît definiţii deghizate.*

Atunci, cum trebuie să considerăm această întrebare: Este adevărată geometria euclidiană?

Ea nu are nici un sens.

E ca şi cum te-ai întreba dacă sistemul metric este adevărat şi vechile măsuri sînt false; dacă coordonatele carteziene sînt adevărate şi coordonatele polare false. O geometrie nu poate fi

mai adevărată decît alta; ea poate numai să fie *mai comodă.*

Or, geometria euclidiană este şi va rămîne cea mai comodă:

1. Pentru că este cea mai simplă; iar ea nu e astfel numai ca urmare a deprinderilor noastre mentale sau a nu ştiu cărei intuiţii directe pe care am avea-o despre spaţiul euclidian; ea este cea mai simplă în sine, la fel cum un polinom de gradul întîi este mai simplu decît un polinom de gradul al doilea; formulele trigonometriei sferice sînt mai complicate decît acelea ale trigonometriei rectilinii, şi ele ar apărea tot aşa unui analist care le-ar ignora semnificaţia geometrică.

2. Pentru că ea se acordă destul de bine cu proprietăţile solidelor naturale, ale acestor corpuri de care se apropie mîinile şi ochii noştri şi cu care ne făurim instrumentele de măsură.

Capitolul IV

Spaţiul şi Geometria

Să începem printr-un mic paradox.

Nişte fiinţe al căror spirit ar fi alcătuit ca al nostru şi care ar avea aceleaşi simţuri ca şi noi, dar care nu ar fi primit nici o educaţie prealabilă, ar putea să capete, dintr-o lume exterioară convenabil aleasă, astfel de impresii, încît să fie determinate să construiască o geometrie, alta decît cea a lui Euclid, localizînd fenomenele acestei lumi exterioare într-un spaţiu neeuclidian sau chiar într-un spaţiu cu patru dimensiuni.

Pentru noi, care am fost educaţi de lumea de aici, dacă am fi transportaţi brusc în această lume nouă, nu am avea dificultăţi în a-i raporta fenomenele la spaţiul nostru euclidian. Invers, dacă aceste fiinţe ar fi transportate la noi, ele ar fi determinate să raporteze fenomenele noastre la spaţiul neeuclidian.

Dar ce spun eu; cu puține eforturi am putea să o facem și noi. Cineva care ar urmări toată viața acest lucru, ar putea să ajungă, poate, să-și reprezinte cea de-a patra dimensiune.

Spațiul geometric și spațiul reprezentativ. — Se spune deseori că imaginile obiectelor exterioare sînt localizate în spațiu, că ele chiar nici nu se pot forma decît cu această condiție. Se spune, de asemenea, că acest spațiu, care servește astfel de *cadru* cu totul pregătit pentru senzațiile noastre și pentru reprezentările noastre, este identic cu acela al geometrilor, avînd toate proprietățile acestuia.

Tuturor celor cu bun simț care gîndesc astfel, fraza precedentă ar trebui să li se pară de-a dreptul uimitoare. Să vedem însă dacă ei nu suferă de vreo iluzie, pe care o analiză aprofundată ar putea să o risipească.

Care sînt, mai întîi, proprietățile spațiului propriu-zis? Vreau să spun ale aceluia care constituie obiectul geometriei și pe care îl voi numi *spațiul geometric*. Iată cîteva dintre ele, esențiale: acest spațiu

1. este continuu;
2. este infinit;
3. are trei dimensiuni;
4. este omogen, adică toate punctele sale sînt identice;
5. este izotrop, adică toate dreptele care trec printr-un același punct sînt identice.

Să-l comparăm acum cu cadrul reprezentărilor noastre și al senzațiilor noastre, pe care aș putea să-l numesc *spațiul reprezentativ*.

Spațiul vizual. — Să considerăm mai întîi o impresie pur vizuală, datorată unei imagini care se formează pe fundul retinei.

O analiză sumară ne arată această imagine ca fiind continuă, dar ca avînd numai două dimen-

siuni; lucru care distinge deja de spațiul geometric ceea ce se poate numi *spațiul vizual pur*.

Pe de altă parte, această imagine este închisă într-un cadru limitat.

În sfîrșit, există și o altă diferență, nu mai puțin importantă: *acest spațiu vizual pur nu este omogen*. Nu toate punctele retinei, făcînd abstracție de imaginile care se pot forma aici, joacă același rol. Pata galbenă nu poate fi în nici un caz considerată ca identică cu un punct de pe marginea retinei. Într-adevăr, nu numai că același obiect produce aici impresii mult mai vii, dar în orice cadru *limitat* punctul care ocupă centrul cadrului nu va apărea ca identic cu un punct marginal.

O analiză aprofundată ne-ar arăta că, fără îndoială, continuitatea spațiului vizual și cele două dimensiuni ale sale nu sînt nici ele decît o iluzie; ea ar îndepărta deci și mai mult spațiul vizual de spațiul geometric. Dar să trecem peste această remarcă, ale cărei consecințe au fost suficient examinate în Capitolul II.

Totuși, vederea ne permite să apreciem distanțele și, prin urmare, să percepem o a treia dimensiune. Însă oricine știe că această percepție a celei de-a treia dimensiuni se reduce la resimțirea efortului de acomodare făcut și a convergenței pe care trebuie să o ia ochii pentru a percepe un obiect în mod distinct.

Acestea sînt senzații musculare cu totul diferite de senzațiile vizuale care ne-au dat noțiunea primelor două dimensiuni. Cea de-a treia dimensiune nu ne va apărea deci ca avînd același rol ca celelalte două. Ceea ce se poate numi *spațiul vizual complet* nu este deci un spațiu izotrop.

El are, este adevărat, exact trei dimensiuni; aceasta înseamnă că elementele senzațiilor noastre vizuale (acelea cel puțin care concură la formarea noțiunii de întindere) vor fi complet definite atunci cînd vor fi cunoscute trei dintre ele; pen-

tru a întrebuința limbajul matematic, vor fi funcții de trei variabile independente.

Dar să examinăm lucrurile ceva mai de aproape. Cea de-a treia dimensiune ne este relevată în două moduri diferite: prin efortul de acomodare și prin convergența ochilor.

Fără îndoială că aceste două indicii sînt totdeauna concordante, că există între ele o relație constantă sau, în termeni matematici, că cele două variabile care măsoară aceste două senzații musculare nu ne apar ca independente; sau, și mai mult, pentru a evita un recurs la noțiuni matematice, mai rafinate, putem să revenim la limbajul din Capitolul II și să enunțăm același fapt după cum urmează: dacă două senzații de convergență, A și B, sînt indiscernabile, cele două senzații de acomodare, A' și B', care le vor însoți, vor fi, de asemenea, indiscernabile.

Dar aici avem, pentru a spune astfel, un fapt de experiență; nimic nu ne împiedică să presupunem *a priori* contrariul, și dacă contrariul are loc, dacă aceste două senzații musculare variază independent una de alta, va trebui să ținem seamă de o variabilă independentă în plus, iar „spațiul vizual complet" ne va apărea ca un continuu fizic cu patru dimensiuni.

Voi adăuga că e vorba aici de un fapt de experiență *externă*. Nimic nu ne împiedică să presupunem că o ființă avînd spiritul alcătuit ca al nostru, avînd aceleași organe de simțuri ca și noi, ar putea fi plasată într-o lume în care lumina nu ar ajunge la ea decît după ce a traversat medii de refracție complicate. Cele două indicii care ne slujesc să apreciem distanțele, ar înceta să fie legate printr-o relație constantă. O ființă care și-ar face educația simțurilor într-o asemenea lume, ar atribui, fără îndoială, patru dimensiuni spațiului vizual complet.

Spațiul tactil și spațiul motor. — „Spațiul tactil" este și mai complicat decît spațiul vizual, înde-

părtîndu-se și mai mult de spațiul geometric. Este inutil să repet, pentru pipăit, discuția pe care am făcut-o pentru văz.

Dar, în afară de datele văzului și ale pipăitului, există și alte senzații care contribuie tot atît, dacă nu chiar mai mult decît acestea la geneza noțiunii de spațiu, senzații cunoscute de toată lumea, care însoțesc mișcările noastre și care sînt denumite, în mod obișnuit, musculare.

Cadrul corespunzător constituie ceea ce se poate numi *spațiul motor*.

Fiecare mușchi dă naștere unei senzații speciale care se poate intensifica sau diminua, astfel încît ansamblul senzațiilor noastre musculare va depinde de atîtea variabile cîți mușchi avem. Din acest punct de vedere, *spațiul motor ar avea atîtea dimensiuni cîți mușchi avem*.

Știu că se va spune că, dacă senzațiile musculare contribuie la formarea noțiunii de spațiu, aceasta se datorește faptului că avem sentimentul *direcției* fiecărei mișcări și că el face parte integrantă din senzație. Dacă lucrurile ar sta astfel, dacă o senzație musculară nu ar putea lua naștere decît însoțită de acest sentiment geometric al direcției, spațiul geometric ar fi într-adevăr o formă impusă sensibilității noastre.

Ceea ce însă nu constat deloc atunci cînd îmi analizeze senzațiile.

Ceea ce observ este faptul că senzațiile care corespund unor mișcări avînd aceeași direcție sînt legate în intelectul meu printr-o simplă *asociație de idei*. La această asociație se reduce ceea ce numim „sentimentul direcției" Nu am putea deci să regăsim acest sentiment într-o senzație unică.

Această asociație este extrem de complexă, întrucît contracția unui același mușchi poate corespunde, după poziția membrelor, unor mișcări avînd direcții foarte diferite.

Ea este de altfel în mod evident căpătată; este, ca toate asociațiile de idei, rezultatul unei *deprinderi;* această deprindere rezultă ca însăși din *experiențe* foarte numeroase; fără nici o îndoială, dacă educația simțurilor noastre s-ar fi făcut într-un mediu diferit, în care am fi primit impresii diferite, atunci ar fi luat naștere deprinderi contrare și senzațiile noastre musculare s-ar fi asociat după alte legi.

Caracterele spațiului reprezentativ. — Astfel, spațiul reprezentativ, sub tripla sa formă, vizuală, tactilă și motorie, este în mod esențial diferit de spațiul geometric.

El nu este nici omogen, nici izotrop; nu se poate spune nici chiar că are trei dimensiuni.

Se susține adeseori că noi „proiectăm" în spațiul geometric obiectele percepției noastre externe; că le „localizăm".

Are vreun sens acest lucru și care să fie el?

Vrea să însemne aceasta că noi ne *reprezentăm* obiectele exterioare în spațiul geometric?

Reprezentările noastre nu sînt decît reproducerea senzațiilor noastre, ele nu pot deci să se rînduiască decît în același cadru ca și ele, adică în spațiul reprezentativ.

Ne este tot atît de greu să ne reprezentăm corpurile exterioare în spațiul geometric, pe cît îi este cu neputință unui pictor să picteze, pe un tablou plan, obiecte cu cele trei dimensiuni ale lor.

Spațiul reprezentativ nu este decît o imagine a spațiului geometric, imagine deformată de un fel de perspectivă, iar noi nu putem să ne reprezentăm obiectele decît supunîndu-le legilor acestei perspective.

Noi nu ne reprezentăm, deci, corpurile exterioare în spațiul geometric, ci *raționăm* asupra acestor corpuri ca și cum ele ar fi situate în spațiul geometric.

Cînd, pe de altă parte, se spune că noi „localizăm" cutare obiect în cutare punct al spațiului, ce vrea să spună acest lucru?

Simplu, că noi ne reprezentăm mișcările care trebuie făcute pentru a atinge acest obiect; să nu se spună că, pentru a ne reprezenta aceste mișcări, trebuie ca ele însele să fie proiectate în spațiu și că noțiunea de spațiu trebuie, prin urmare, să preexiste.

Cînd spun că noi ne reprezentăm aceste mișcări, vreau să spun numai că noi ne reprezentăm senzațiile musculare care însoțesc aceste mișcări și care nu au nici un caracter geometric, ceea ce nu implică deloc preexistența noțiunii de spațiu.

Schimbări de stare și schimbări de poziție. — Dar, se va spune, dacă ideea de spațiu geometric nu se impune spiritului nostru, dacă, pe de altă parte, nici una dintre senzațiile noastre nu poate să ne-o genereze, atunci cum a putut ea să ia naștere?

Aceasta este problema pe care trebuie s-o examinăm acum și care ne va cere ceva timp, dar pot să rezum în cîteva cuvinte încercarea de explicație pe care o voi dezvolta.

Singură, luată izolat, *nici una din senzațiile noastre nu ar putea să ne conducă la ideea de spațiu; numai cercetînd legile după care se succed aceste senzații putem ajunge la ea.*

Constatăm mai întîi că impresiile noastre sînt supuse schimbării; însă, printre aceste schimbări, sîntem curînd obligați să facem o distincție: spunem cînd că obiectele, cauze ale acestor impresii, și-au schimbat starea, cînd că ele și-au schimbat poziția, că ele doar s-au deplasat.

Dacă un obiect își schimbă starea sau numai poziția, acest fapt se traduce pentru noi totdeauna în același mod: *printr-o modificare într-un ansamblu de impresii.*

Cum am putut fi noi, aşadar, puşi în situaţia de a le distinge? Este uşor de explicat. Dacă a fost numai o schimbare de poziţie, noi putem restabili ansamblul primitiv de impresii făcînd mişcări care ne plasează din nou faţă de obiectul mobil în aceeaşi situaţie *relativă*. *Cercetăm* astfel modificarea ce s-a produs şi restabilim starea iniţială printr-o modificare inversă.

Dacă este vorba, de exemplu, de văz şi dacă un obiect se deplasează în faţa ochilor noştri, noi putem „să-l urmărim din ochi" şi să-i menţinem imaginea într-un acelaşi punct al retinei, prin mişcări adecvate ale globului ocular.

Noi sîntem conştienţi de aceste mişcări pentru că ele sînt voluntare şi pentru că sînt însoţite de senzaţii musculare, dar aceasta nu înseamnă că ni le reprezentăm în spaţiul geometric.

Ceea ce caracterizează astfel schimbarea de poziţie, ceea ce o deosebeşte de schimbarea de stare este faptul că ea poate fi *corectată* prin acest mijloc.

Se poate trece, aşadar, de la ansamblul de impresii A la ansamblul B în două moduri diferite: 1. involuntar şi fără a încerca senzaţii musculare, ceea ce se întîmplă atunci cînd obiectul este acela care se deplasează; 2. voluntar şi cu senzaţii musculare, ceea ce se întîmplă atunci cînd obiectul este imobil, dar ne deplasăm noi astfel încît obiectul, în raport cu noi, are o mişcare relativă.

Dacă aşa stau lucrurile, trecerea de la ansamblul A la ansamblul B nu este decît o schimbare de poziţie.

Rezultă de aici că văzul şi pipăitul nu ne-ar putea da noţiunea de spaţiu fără ajutorul „simţului muscular"

Nu numai că această noţiune n-ar putea deriva dintr-o senzaţie unică, ci *dintr-un şir de senzaţii*, dar, mai mult, o fiinţă *imobilă* nu ar

putea niciodată s-o dobîndească, întrucît, neputînd *corecta* prin mişcările sale efectele schimbărilor de poziţie ale obiectelor exterioare, ea nu ar avea nici un temei pentru a le distinge de schimbările de stare. Ea nu ar putea s-o dobîndească nici dacă mişcările sale nu ar fi voluntare sau dacă acestea nu ar fi însoţite de senzaţii oarecare.

Condiţii ale compensării. — Cum este oare posibilă o asemenea compensare astfel încît două schimbări, de altfel independente una de alta, să se corecteze în mod reciproc?

Cineva *care ar şti deja geometria* ar raţiona după cum urmează:

Pentru a se produce compensarea trebuie, în mod evident, ca diversele părţi ale obiectului exterior, pe de o parte, diversele organe ale simţurilor noastre, pe de altă parte, să se regăsească, după dubla schimbare, în aceeaşi poziţie *relativă*. Iar pentru aceasta trebuie ca diversele părţi ale obiectului exterior să fi păstrat, de asemenea, unele în raport cu celelalte, aceeaşi poziţie relativă şi să se întîmple la fel în ceea ce priveşte diversele părţi ale corpului nostru, unele în raport cu celelalte.

Cu alte cuvinte, obiectul exterior, în prima schimbare, trebuie să se deplaseze în maniera unui solid invariabil şi la fel trebuie să fie şi cu ansamblul corpului nostru, în cea de-a doua schimbare, care o corectează pe prima.

În aceste condiţii, compensarea se poate produce.

Dar noi, *care nu ştim încă geometrie*, deoarece pentru noi noţiunea de spaţiu nu este încă formată, nu putem să raţionăm în acest mod, noi nu putem să prevedem *a priori* dacă compensarea este posibilă. Dar experienţa ne învaţă că ea are loc cîteodată şi de la acest fapt de experienţă

pornim pentru a distinge schimbările de stare de schimbările de poziție.

Corpurile solide și geometria. — Printre obiectele care ne înconjoară, există unele care suferă în mod frecvent deplasări susceptibile de a fi corectate printr-o mișcare *corelativă* a propriului nostru corp — acestea sînt *corpurile solide*.

Celelalte obiecte, a căror formă este variabilă, nu suferă decît în mod excepțional asemenea deplasări (schimbare de poziție fără schimbare de formă). Cînd un corp s-a deplasat *deformîndu-se*, noi nu mai putem, prin mișcări adecvate, să readucem organele simțurilor noastre în aceeași situație *relativă* în raport cu acest corp; noi nu mai putem, prin urmare, să restabilim ansamblul primitiv de impresii.

Doar mai tîrziu, și în urma unor experiențe noi, învățăm să descompunem corpurile de formă variabilă în elemente mai mici, astfel încît fiecare dintre ele să se deplaseze aproape după aceleași legi ca și corpurile solide. Noi distingem astfel „deformările" de celelalte schimbări de stare; în aceste deformări fiecare element suferă o simplă schimbare de poziție, care poate fi corectată, dar modificarea suferită de ansamblu este mai profundă și nu mai este susceptibilă de a fi corectată printr-o mișcare corelativă.

O asemenea noțiune este însă foarte complexă și ea nu a putut să apară decît relativ tîrziu; ea nu ar fi putut lua naștere de altfel dacă nu ne-ar fi învățat observarea corpurilor solide să distingem schimbările de poziție.

Dacă, deci, nu ar fi existat corpuri solide în natură, nu ar fi existat geometrie.

O altă remarcă merită, de asemenea, o clipă de atenție. Să presupunem un corp solid care ocupă mai întîi poziția α și care trece apoi în poziția β; în prima sa poziție, el ne va provoca ansamblul de impresii A, iar în cea de-a doua poziție — ansamblul de impresii B. Fie acum un

al doilea corp solid, avînd calități cu totul diferite de primul, fiind, de exemplu, de culoare diferită. Să mai presupunem că el trece din poziția α, unde ne provoacă ansamblul de impresii A', în poziția β, unde ne provoacă ansamblul de impresii B'

În general, ansamblul A nu va avea nimic comun cu ansamblul A', nici ansamblul B cu ansamblul B'. Trecerea de la ansamblul A la ansamblul B și cea de la ansamblul A' la ansamblul B' sînt deci două schimbări care, *în sine*, nu au în general nimic comun.

Și totuși, privim aceste două schimbări ca pe niște deplasări și, mai mult încă, le considerăm ca *aceeași* deplasare. Cum se întîmplă acest lucru?

Este simplu, pentru că ele, atît una, cît și cealaltă, pot fi corectate prin *aceeași* mișcare corelativă a corpului nostru.

Așadar, „mișcarea corelativă" este *singura legătură* între două fenomene pe care, altfel, nu ne-am fi gîndit niciodată să le alăturăm.

Pe de altă parte, corpul nostru, datorită numărului articulațiilor și mușchilor săi, poate efectua o mulțime de mișcări diferite; însă nu toate dintre acestea pot „corecta" o modificare a obiectelor exterioare; vor fi capabile de un astfel de lucru numai acelea în care întregul nostru corp, sau cel puțin organele noastre de simț mobilizate în acest joc, se deplasează în bloc, adică fără ca pozițiile sale relative să varieze, în maniera unui corp solid.

În rezumat:

1. Sîntem determinați mai întîi să distingem două categorii de fenomene:

Unele, involuntare, neînsoțite de senzații musculare, sînt atribuite de noi obiectelor exterioare; acestea sînt schimbările externe;

Celelalte, ale căror caractere sînt opuse, le atribuim mișcărilor propriului nostru corp; acestea sînt schimbările interne;

2. Remarcăm că anumite schimbări din fiecare dintre aceste categorii pot fi corectate printr-o schimbare corelativă din cealaltă categorie;

3. Distingem astfel, printre schimbările externe, pe acelea care au o mișcare corelativă în cealaltă categorie și pe care le vom numi deplasări; la fel, printre schimbările interne, distingem pe acelea care au o mișcare corelativă în prima categorie.

E definită astfel, datorită acestei reciprocități, o clasă particulară de fenomene pe care le numim deplasări. *Legile acestor fenomene constituie obiectul geometriei.*

Legea omogenității. — Prima dintre aceste legi este aceea a omogenității.

Să presupunem că, printr-o schimbare externă α, am trece de la ansamblul de impresii A la ansamblul B, apoi că această schimbare α este corectată printr-o mișcare corelativă voluntară β, astfel încît să fim readuși la ansamblul A.

Să presupunem acum că o altă schimbare externă α' ne face să trecem din nou de la ansamblul A la ansamblul B.

Experiența ne va arăta că această schimbare α' poate fi corectată, ca și α, printr-o mișcare corelativă voluntară β' și că această mișcare β' corespunde acelorași senzații musculare ca și mișcarea β care a corectat pe α.

Acesta este faptul care se enunță de obicei prin propoziția *spațiul este omogen și izotrop.*

Se poate spune, de asemenea, că o mișcare ce s-a produs o dată poate să se repete a doua oară, a treia oară și așa mai departe, fără ca proprietățile sale să varieze.

În primul capitol, în care am studiat natura raționamentului matematic, am văzut impor-

tanța pe care trebuie s-o atribuim posibilității de a se repeta în mod indefinit o aceeași operație.

Din această repetiție își trage forța raționamentul matematic; grație legii omogenității, pe care a desprins-o din faptele geometrice.

Pentru a trata lucrurile complet, s-ar cuveni să adaug la legea omogenității o mulțime de alte legi analoage, în detaliile cărora nu vreau să intru, dar pe care matematicienii le rezumă într-un cuvînt, spunînd că deplasările formează „un grup"

Lumea neeuclidiană — Dacă spațiul geometric ar fi un cadru impus *fiecăreia* dintre reprezentările noastre, ar fi imposibil să avem o imagine în afara acestui cadru și nu am putea schimba nimic în geometria noastră.

Dar nu se întîmplă așa, geometria nefiind decît rezumatul legilor după care *se succed* aceste imagini. Se pot imagina atunci reprezentări cu totul asemănătoare reprezentărilor noastre obișnuite, dar care se succed după legi diferite de acelea cu care sîntem noi deprinși.

Ar fi de conceput, astfel, că niște ființe a căror educație s-ar face într-un mediu în care aceste legi ar fi răsturnate, ar putea să aibă o geometrie foarte diferită de a noastră.

Să presupunem, de exemplu, o lume închisă într-o sferă mare și supusă legilor următoare:

Temperatura nu este uniformă: este maximă în centru, și scade pe măsură îndepărtării de el, pentru a se reduce la zero absolut cînd se atinge sfera în care este închisă această lume.

Să precizez legea după care variază temperatura. Fie R raza sferei limită; fie r distanța de la un punct considerat la centrul acestei sfere. Temperatura absolută va fi proporțională cu $R^2 - r^2$.

Voi presupune în plus că, în această lume, toate corpurile au același coeficient de dilatare,

astfel încît lungimea unui segment oarecare este proporțională cu temperatura sa absolută.

Voi presupune, în sfîrșit, că un obiect deplasat de la un punct la altul, a cărui temperatură este diferită, trece imediat în echilibru caloric cu noul său mediu.

Nimic în aceste ipoteze nu este contradictoriu sau inimaginabil.

Un obiect mobil va deveni în acest caz din ce în ce mai mic pe măsură ce se va apropia de sfera limită.

Să observăm mai întîi că, dacă această lume este limitată din punctul de vedere al geometriei noastre obișnuite, ea va părea infinită locuitorilor ei.

Într-adevăr, cînd aceștia vor să se apropie de sfera limită, ei se răcesc și devin din ce în ce mai mici. Pașii pe care îi vor face vor fi, de asemenea, din ce în ce mai mici, astfel încît ei nu vor putea atinge niciodată sfera limită.

Dacă, pentru noi, geometria este studiul legilor după care se mișcă corpurile solide invariabile, pentru aceste ființe imaginare ea va fi studiul legilor după care se mișcă solidele *deformate prin diferențele de temperatură* despre care am vorbit adineauri.

Fără îndoială, în lumea noastră solidele naturale încearcă și ele variații de formă și de volum datorate încălzirii sau răcirii.

Dar noi neglijăm aceste variații atunci cînd stabilim fundamentele geometriei, căci, pe lîngă faptul că aceste variații sînt foarte slabe, ele sînt neregulate și ne apar, prin urmare, accidentale.

În această lume ipotetică lucrurile ar sta altfel, aceste variații urmînd legi regulate și foarte simple.

Pe de altă parte, diversele părți solide din care s-ar compune corpul locuitorilor săi, ar suferi aceleași variații de formă și de volum.

Voi mai face o ipoteză ; voi presupune că lumina traversează medii cu refringență diferită și astfel

încît indicele de refracție să fie invers proporțional cu R^2-r^2. Este ușor de văzut că, în aceste condiții, razele luminoase nu ar fi rectilinii, ci circulare.

Pentru a justifica ceea ce am spus pînă acum, îmi rămîne să arăt că anumite schimbări survenite în poziția obiectelor exterioare pot fi *corectate* prin mișcări corelative ale ființelor simțitoare care locuiesc în această lume imaginară; și aceasta în așa fel, încît să restabilească ansamblul inițial al impresiilor ființelor respective.

Într-adevăr, să presupunem că un obiect se deplasează, deformîndu-se, nu ca un solid invariabil, ci ca un solid care suportă dilatări inegale, conforme cu legea temperaturii pe care am presupus-o mai sus. Să mi se permită, pentru a scurta expunerea, să denumesc o asemenea mișcare *deplasare neeuclidiană.*

Dacă o ființă simțitoare se găsește în apropiere, impresiile sale vor fi modificate prin deplasarea obiectului, dar ea va putea să le restabilească, mișcîndu-se într-un mod convenabil. Este suficient ca, în cele din urmă, ansamblul alcătuit din obiect și ființa simțitoare, considerat ca formînd un singur corp, să fi suportat una dintre acele deplasări particulare pe care le-am numit mai sus neeuclidiene. Acest fapt este posibil dacă se presupune că membrele acestor ființe se dilată după aceeași lege ca și celelalte corpuri din lumea în care locuiesc.

Deși, din punctul de vedere al geometriei noastre obișnuite corpurile se deformează în această deplasare și diversele lor părți nu se mai află în aceeași situație relativă, putem observa totuși că impresiile ființei simțitoare redevin aceleași.

Într-adevăr, dacă distanțele dintre diversele părți pot varia, totuși părțile inițial în contact ajung din nou în contact. Impresiile tactile nu se schimbă deci.

Pe de altă parte, ținînd seama de ipoteză făcută mai sus cu privire la refracția și la curbura razelor luminoase, impresiile vizuale vor rămîne, de asemenea, aceleași.

Aceste ființe imaginare vor fi, așadar, determinate, ca și noi, să clasifice fenomenele la care vor fi martore și să distingă, printre ele, „schimbările de poziție" care pot fi corectate printr-o mișcare voluntară corelativă.

Dacă ele fundează o geometrie, aceasta nu va fi ca a noastră, adică studiul mișcărilor solidelor invariabile; va fi una a schimbărilor de poziție, pe care ele le vor deosebi ca atare, și care nu sînt altele decît „deplasările neeuclidiene" — *aceasta va fi geometria neeuclidiană.*

Astfel, niște ființe ca noi, a căror educație s-ar face într-o asemenea lume, nu ar avea aceeași geometrie ca noi.

Lumea cu patru dimensiuni. — Așa cum se concepe o lume neeuclidiană, tot astfel se poate reprezenta și o lume cu patru dimensiuni.

Simțul văzului, chiar dacă e vorba de un singur ochi, împreună cu senzațiile musculare ce țin de mișcările globului ocular, ar putea fi suficiente pentru a ne face să cunoaștem spațiul cu trei dimensiuni.

Imaginile obiectelor exterioare apar pe retină, care este un tablou cu două dimensiuni; acestea se numesc *perspective.*

Însă, cum aceste obiecte sînt mobile, așa cum sînt și ochii noștri, noi avem în chip succesiv diverse perspective ale unui aceluiași corp, prinse din mai multe puncte de vedere diferite.

Constatăm în același timp că trecerea de la o perspectivă la alta este adeseori însoțită de senzații musculare.

Dacă trecerea de la perspectiva A la perspectiva B și aceea de la perspectiva A' la perspectiva B' sînt însoțite de aceleași senzații musculare, atunci le asociem, socotindu-le operații de aceeași natură.

Studiind apoi legile după care se combină aceste operații, recunoaștem că ele formează un grup, care are aceeași structură ca grupul mișcărilor solidelor invariabile.

Or, am văzut că, din proprietățile acestui grup, am scos noțiunea de spațiu geometric și aceea a celor trei dimensiuni.

Înțelegem astfel cum a putut lua naștere ideea unui spațiu cu trei dimensiuni din spectacolul acestor perspective, deși fiecare dintre ele nu are decît două dimensiuni: pentru că *ele se succed după anumite legi.*

Ei bine, la fel cum se poate face pe un plan perspectiva unei figuri cu trei dimensiuni, tot așa se poate face și cea a unei figuri cu patru dimensiuni pe un tablou cu trei (sau cu două) dimensiuni. Aceasta nu-i decît un joc pentru geometru.

Se pot obține chiar, la o aceeași figură, mai multe perspective, din mai multe puncte de vedere diferite.

Putem să ne reprezentăm cu ușurință aceste perspective, pentru că ele nu au decît trei dimensiuni.

Să ne imaginăm că diversele perspective ale unui aceluiași obiect se succed; că trecerea de la una la alta este însoțită de senzații musculare.

Bineînțeles, două dintre aceste treceri vor fi considerate ca două operații de aceeași natură atunci cînd vor fi asociate cu aceleași senzații musculare.

Nimic nu ne împiedică, în acest caz, să ne imaginăm că aceste operații se combină după o lege pe care o vrem, de exemplu, astfel încît să formeze un grup care să aibă aceeași structură ca grupul mișcărilor unui solid invariabil cu patru dimensiuni.

Nu există nimic aici care să nu se poată reprezenta și, totuși, aceste senzații sînt cele pe care le-ar încerca o ființă dotată cu o retină cu două

dimensiuni și care ar putea să se deplaseze în spațiul cu patru dimensiuni.

În sensul acesta, este îngăduit să se afirme că ar fi posibil să se reprezinte cea de-a patra dimensiune.

Nu ar fi posibil să se reprezinte în acest mod spațiul lui Hilbert, de care vorbeam în capitolul precedent, pentru că acest spațiu nu mai este un continuu de ordinul al doilea. El se deosebește, deci, mult prea mult de spațiul nostru obișnuit.

Concluzii. — Se vede, așadar, că experiența joacă un rol indispensabil în geneza geometriei; dar ar fi o greșeală să se conchidă de aici că geometria este o știință a experienței, chiar și în parte.

Dacă ar fi așa, ea nu ar fi decît aproximativă și provizorie. Și ce aproximație grosieră!

Geometria nu ar fi decît studiul mișcărilor solidelor; dar ea nu se ocupă, în realitate, de solidele naturale, ea are ca obiect anumite solide ideale, absolut invariabile, care sînt o imagine simplificată și foarte îndepărtată a primelor.

Noțiunea acestor corpuri ideale este produsă în întregime de spiritul nostru, iar experiența nu este decît un prilej care ne îndeamnă să o dăm la iveală.

Ceea ce constituie obiectul geometriei este studiul unui „grup" particular; dar conceptul general de grup preexistă în spiritul nostru cel puțin în mod virtual. El ni se impune, nu ca formă a sensibilității noastre, ci ca formă a intelectului nostru.

Numai că, dintre toate grupurile posibile, trebuie să se aleagă acela ce va fi, pentru a spune astfel, *etalonul* la care vom raporta fenomenele naturale.

Experiența ne călăuzește în această alegere, nu ne-o impune; ea ne face să recunoaștem nu care este geometria cea mai adevărată, ci care este cea mai *comodă*.

Se va remarca faptul că eu am putut să descriu lumile fanteziste de mai sus *fără a înceta să întrebuinţez limbajul geometriei obişnuite.*

Şi, într-adevăr, n-am fi fost nevoiţi să schimbăm acest limbaj, dacă ne-am fi transportat noi în acele lumi.

Nişte fiinţe care şi-ar face acolo instrucţia, ar găsi, fără îndoială, mai comod să creeze o geometrie diferită de a noastră, care s-ar adapta mai bine la impresiile lor. În ceea ce ne priveşte, în faţa *aceloraşi* impresii, este sigur că am găsi mai comod să nu ne schimbăm deprinderile.

Capitolul V

Experienţa şi Geometria

1. Am căutat în mai multe rînduri în paginile precedente să arăt că principiile geometriei nu sînt fapte experimentale şi că în special postulatul lui Euclid nu ar putea fi demonstrat prin experienţă.

Oricît de sigure îmi apar aceste raţiuni, cred că trebuie să insist totuşi, pentru că există aici o idee greşită, profund înrădăcinată în multe spirite.

2. Să facem un cerc material, să-i măsurăm raza şi circumferinţa şi să căutăm să vedem dacă raportul dintre aceste două lungimi este egal cu π. Ce am făcut noi? Am făcut o experienţă, nu asupra proprietăţilor spaţiului, ci asupra acelora ale materiei cu care s-a realizat acest *rotund* şi ale materiei din care este făcut metrul care a servit la măsurători.

3. Geometria şi astronomia. — Întrebarea a fost pusă şi în alt mod. Dacă geometria lui Lobacevski este adevărată, paralaxa unei stele foarte îndepărtate va fi finită; dacă geometria lui Riemann este adevărată, paralaxa va fi negativă. Acestea sînt rezultate care par accesibile experienţei şi s-a sperat că observaţiile astrono-

mice ar putea permite să se decidă între cele trei geometrii.

Dar ceea ce se numește linie dreaptă în astronomie este traiectoria razei luminoase. Dacă deci, prin absurd, s-ar descoperi paralaxe negative sau s-ar demonstra că toate paralaxele sînt superioare unei anumite limite, am avea posibilitatea alegerii între două concluzii: am putea renunța la geometria euclidiană sau am putea modifica legile opticii, admițînd că lumina nu se propagă riguros în linie dreaptă.

Inutil să adăugăm că toată lumea ar privi această soluție ca mai avantajoasă.

Geometria euclidiană nu are, deci, nici un motiv să se teamă de experiențele noi.

4. Se poate susține oare că anumite fenomene, posibile în spațiul euclidian, ar fi imposibile în spațiul neeuclidian, astfel încît experiența, constatînd aceste fenomene, să contrazică direct ipoteza neeuclidiană? Pentru mine, o asemenea întrebare nu se poate pune. După opinia mea, ea este complet echivalentă cu următoarea, a cărei absurditate este evidentă: există oare lungimi pe care le putem exprima în metri și centimetri, dar pe care nu le-am putea măsura în prăjini, picioare și șchioape, astfel încît experiența, constatînd existența acestor lungimi, să contrazică direct ipoteza că există prăjini împărțite în șase picioare?

Să examinăm chestiunea mai de aproape. Presupun că linia dreaptă posedă în spațiul euclidian două proprietăți oarecare, pe care le voi denumi A și B; că în spațiul neeuclidian ea posedă încă proprietatea A, dar nu mai posedă proprietatea B; presupun, în sfîrșit, că, atît în spațiul euclidian, cît și în spațiul neeuclidian, linia dreaptă este singura linie care posedă proprietatea A.

Dacă ar fi astfel, experiența ar putea să decidă între ipoteza lui Euclid și cea a lui Lobacevski. S-ar constata că un obiect concret oareçare, acce-

sibil experienței, de exemplu un fascicul de raze luminoase, posedă proprietatea A; s-ar conchide de aici că el este rectiliniu și s-ar căuta apoi dacă el posedă sau nu proprietatea B.

Însă *nu este așa*, nu există proprietate care să poată fi, ca această proprietate A, un criteriu absolut ce permite să se recunoască linia dreaptă și să o distingă de orice altă linie.

Se va spune oare, de exemplu: „această proprietate va fi următoarea: linia dreaptă este o linie astfel încît o figură din care face parte această linie nu poate să se miște fără ca distanțele dintre punctele sale să varieze și astfel încît toate punctele acestei linii să rămînă fixe?"

Iată, într-adevăr, o proprietate care, în spațiul euclidian sau neeuclidian, aparține dreptei și numai acesteia. Dar cum se va recunoaște prin experiență dacă ea aparține cutărui sau cutărui obiect concret? Va trebui să se măsoare distanțe, dar cum se va ști dacă o mărime concretă pe care am măsurat-o cu instrumentul meu material reprezintă într-adevăr distanța abstractă?

N-am făcut altceva decît să îndepărtăm dificultatea.

În realitate, proprietatea pe care am enunțat-o mai sus nu este o proprietate numai a liniei drepte, ci a liniei drepte și a distanței. Pentru ca ea să poată servi de criteriu absolut, ar trebui să se poată stabili nu numai că ea nu aparține și unei alte linii decît liniei drepte și distanței, dar și că ea nu aparține unei alte linii decît liniei drepte și unei alte mărimi decît distanței. Or, acest fapt nu este adevărat.

Este, așadar, imposibil să se imagineze o experiență concretă care să poată fi interpretată în sistemul euclidian și să nu poată fi interpretată în sistemul lobacevskian, astfel încît pot să conchid: nici o experiență nu va fi vreodată în contradicție cu postulatul lui Euclid; pe de altă

parte, nici o experiență nu va fi vreodată în contradicție cu postulatul lui Lobacevski.

5. Dar nu este suficient ca geometria euclidiană (sau neeuclidiană) să nu poată fi vreodată contrazisă direct de către experiență. Nu s-ar putea întîmpla oare ca ea să nu fie în acord cu experiența decît violînd principiul rațiunii suficiente și pe cel al relativității spațiului?

Să mă explic: să considerăm un sistem material oarecare; va trebui să cercetăm, pe de o parte, „starea" diverselor corpuri ale acestui sistem (de exemplu temperatura lor, potențialul lor electric etc.), și, pe de altă parte, poziția lor în spațiu; printre datele care permit să se definească această poziție vom mai distinge distanțele dintre aceste corpuri, care definesc pozițiile lor relative, și condițiile care definesc poziția absolută a sistemului și orientarea sa absolută în spațiu.

Legile fenomenelor care se vor produce în acest sistem vor putea depinde de starea acestor corpuri și de distanțele dintre ele, dar, din cauza relativității și pasivității spațiului, ele nu vor depinde de poziția absolută și de orientarea absolută ale sistemului.

Cu alte cuvinte, starea corpurilor și distanțele dintre ele într-un moment oarecare vor depinde numai de starea acestor corpuri *și* de distanțele dintre ele în momentul inițial, dar nu vor depinde nicidecum de poziția absolută inițială a sistemului și de orientarea sa absolută inițială. Este ceea ce voi putea denumi, pe scurt, *legea relativității*.

Am vorbit pînă acum ca un geometru euclidian. Dar am spus că o experiență, oricare ar fi ea, comportă o interpretare în ipoteza euclidiană; însă ea comportă, de asemenea, una în ipoteza neeuclidiană.

Noi am făcut o serie de experiențe, le-am interpretat în ipoteza euclidiană, dar am recunoscut că aceste experiențe astfel interpretate nu violează „legea relativității".

Interpretăm acum experiențele în ipoteza neeuclidiană: acest fapt este întotdeauna posibil; numai distanțele neeuclidiene ale diferitelor corpuri, în această interpretare nouă, nu vor fi în general aceleași ca distanțele euclidiene în interpretarea inițială.

Dar experiențele noastre, interpretate în acest mod nou, vor mai fi ele în acord cu „legea relativității"? Și dacă acest acord nu ar avea loc, nu am avea oare și mai mult dreptul să spunem că experiența a dovedit falsitatea geometriei neeuclidiene?

Este ușor de văzut că o astfel de teamă n-are sens; într-adevăr, pentru a se putea aplica legea relativității cu toată rigoarea, ea trebuie aplicată la întregul univers. Căci dacă s-ar considera numai o parte din acest univers și dacă poziția absolută a acestei părți ar varia, distanțele pînă la alte corpuri din univers ar varia de asemenea, iar influența lor asupra părții din univers considerată ar putea, prin urmare, să crească sau să se micșoreze, ceea ce ar putea să modifice legile fenomenelor care se petrec aici.

Dar dacă sistemul nostru este întregul univers, experiența nu poate să ne informeze asupra poziției sale absolute și a orientării sale absolute în spațiu. Tot ceea ce vor putea să ne facă să cunoaștem instrumentele noastre, oricît de perfecționate ar fi ele, va fi starea diverselor părți ale universului și distanțele dintre ele.

Astfel încît legea noastră a relativității va putea fi enunțată astfel:

Citirile pe care le vom putea efectua pe instrumentele noastre, într-un moment oarecare, vor depinde numai de citirile pe care le-am fi putut efectua pe aceleași instrumente în momentul inițial.

Or, un asemenea enunț este independent de orice interpretare a experiențelor. Dacă legea este adevărată în interpretarea euclidiană, ea

va fi de asemenea adevărată în interpretarea neeuclidiană.

Să mi se permită o mică digresiune în această privință. Am vorbit mai sus despre datele care definesc poziția diverselor corpuri ale sistemului; ar fi trebuit să vorbesc, de asemenea, despre datele care definesc vitezele lor; ar fi trebuit atunci să disting viteza cu care variază distanțele dintre diversele corpuri; și, pe de altă parte, vitezele de translație și de rotație ale sistemului, adică vitezele cu care variază poziția sa absolută și orientarea sa absolută.

Pentru ca intelectul să fie pe deplin satisfăcut, ar fi trebuit ca legea relativității să se fi putut enunța astfel:

Starea corpurilor și distanțele dintre ele, într-un moment oarecare, precum și vitezele cu care variază aceste distanțe în același moment, vor depinde numai de starea acestor corpuri și de distanțele dintre ele în momentul inițial, ca și de vitezele cu care variau aceste distanțe în acest moment inițial, dar ele nu vor depinde nici de poziția absolută inițială a sistemului, nici de orientarea sa absolută, nici de vitezele cu care variau această poziție absolută și această orientare absolută în momentul inițial.

Din nefericire, legea astfel enunțată nu este în acord cu experiențele, cel puțin așa cum sînt interpretate de obicei.

Să presupunem că un om este transportat pe o planetă al cărei cer ar fi neîncetat acoperit cu o perdea deasă de nori, astfel încît să nu se poată zări niciodată celelalte astre; pe această planetă se va trăi ca și cum ea ar fi izolată în spațiu. Acest om va putea totuși să-și dea seama că planeta se rotește, fie măsurîndu-i aplatizarea (ceea ce se efectuează de obicei prin observații astronomice, operație posibilă însă și prin mijloace pur geodezice), fie repetînd experiența pendulului lui Fou-

cault. Rotația absolută a acestei planete ar putea fi, așadar, pusă în evidență.

Există aici un fapt care îl șochează pe filosof, dar pe care fizicianul este forțat să-l accepte.

Se știe că, pornind de la acest fapt, Newton a conchis asupra existenței spațiului absolut. Dar eu nu pot în nici un chip să adopt un astfel de mod de a vedea lucrurile și voi explica pentru ce în Partea a treia a lucrării noastre. Pentru moment nu doresc să abordez această dificultate.

A trebuit deci să admit, în enunțul legii relativității, introducerea vitezelor de toate felurile printre datele care definesc starea corpurilor.

Oricum, această dificultate este aceeași și pentru geometria lui Euclid și pentru cea a lui Lobacevski; nu trebuie, deci, să mă neliniștească acest fapt, vorbind doar incidental despre el.

Ceea ce este important, este concluzia: experiența nu poate decide între Euclid și Lobacevski.

În rezumat, oricum am întoarce chestiunea, este imposibil să descoperim empirismului geometric un sens rațional.

6. Experiențele nu ne fac să cunoaștem decît raporturile dintre corpuri; nici una din ele nu are și nici nu poate avea ca obiect raporturile corpurilor cu spațiul, sau raporturile dintre diversele părți ale spațiului.

„Da, veți răspunde la aceasta, o experiență unică este insuficientă, pentru că ea nu-mi dă decît o singură ecuație cu mai multe necunoscute; dar cînd voi fi efectuat destule experiențe, voi avea destule ecuații pentru a calcula toate necunoscutele mele"

A cunoaște înălțimea catargului cel mare al unei corăbii nu este suficient pentru a calcula vîrsta căpitanului ei. Cînd veți fi măsurat toate bucățile de lemn ale corăbiei, veți avea multe ecuații, dar nu veți cunoaște mai bine această

vîrstă. Toate măsurătorile pe care le-aţi făcut avînd ca obiect bucăţile dumneavoastră de lemn nu vă pot rezolva nimic altceva decît ceea ce priveşte aceste bucăţi de lemn. La fel experienţele dumneavoastră, oricît de numeroase ar fi ele, neavînd ca obiect decît raporturile dintre corpuri, nu ne vor dezvălui nimic despre raporturile dintre diversele părţi ale spaţiului.

7. Veţi spune că, dacă experienţele au drept obiect corpurile, ele studiază cel puţin proprietăţile geometrice ale corpurilor.

Dar, mai întîi, ce înţelegeţi prin proprietăţi geomctrice ale corpurilor? Presupun că este vorba de raporturile corpurilor cu spaţiul; aceste proprietăţi sînt, deci, inaccesibile experienţelor, care nu au ca obiect decît raporturile dintre corpuri. Ar fi suficient numai aceasta pentru a arăta că nu despre ele poate fi vorba.

Să începem totuşi prin a ne înţelege asupra sensului termenului „proprietăţi geometrice ale corpurilor" Cînd spun că un corp se compune din mai multe părţi, eu presupun că nu enunţ aici o proprietate geometrică, acest fapt rămînînd adevărat chiar dacă aş conveni să dau numele impropriu de puncte celor mai mici părţi pe care le iau în considerare.

Cînd spun: cutare parte din cutare corp este în contact cu cutare parte din cutare alt corp, eu enunţ o propoziţie care priveşte raporturile dintre ele ale acestor două corpuri, iar nu raporturile lor cu spaţiul.

Presupun că veţi admite odată cu mine că nu e vorba aici de proprietăţi geometrice; sînt sigur cel puţin că veţi admite că aceste proprietăţi sînt independente de orice cunoaştere a geometriei metrice.

Acestea fiind stabilite, să-mi imaginez un corp solid, format din opt tije subţiri de fier OA, OB, OC, OD, OE, OF, OG, OH, unite printr-una din extremităţile lor O. Să luăm un al doilea corp

solid, de exemplu o bucată de lemn pe care se pot observa trei pete mici de cerneală, pe care le voi denumi α, β, γ. Presupun apoi că se constată că pot fi aduse în contact $\alpha\beta\gamma$ cu AGO (vreau să spun astfel: α cu A, în timp ce β cu G și γ cu O), pentru că pot fi aduse succesiv în contact $\alpha\beta\gamma$ cu BGO, CGO, DGO, EGO, FGO, apoi cu AHO, BHO, CHO, DHO, EHO, FHO, apoi $\alpha\gamma$ succesiv cu AB, BC, CD, DE, EF, FA.

Iată niște constatări pe care le putem face fără a avea mai dinainte nici o noțiune asupra formei sau asupra proprietăților metrice ale spațiului. Ele nu au deloc ca obiect „proprietățile geometrice ale corpurilor". Iar aceste constatări nu vor fi posibile dacă corpurile asupra cărora s-a experimentat se mișcă după un grup avînd aceeași structură ca grupul lobacevskian (vreau să spun, după aceleași legi ca și corpurile solide în geometria lui Lobacevski). Ele sînt suficiente, deci, pentru a dovedi că aceste corpuri se mișcă după grupul euclidian, sau cel puțin că aceste corpuri nu se mișcă după grupul lobacevskian.

Este ușor de văzut că ele sînt compatibile cu grupul euclidian. Căci am putea să le facem compatibile dacă corpul $\alpha\beta\gamma$ ar fi un solid invariabil din geometria noastră obișnuită, prezentînd forma unui triunghi dreptunghic și dacă punctele ABCDEFGH ar fi vîrfurile unui poliedru format din două piramide hexagonale regulate din geometria noastră obișnuită, avînd drept bază comună ABCDEF și drept vîrfuri — una pe G și cealaltă pe H.

Să presupunem acum că, în locul constatărilor precedente, se observă că este posibil, ca adineauri, să se aplice $\alpha\beta\gamma$ succesiv pe AGO, BGO, CGO, DGO, EGO, FGO, AHO, BHO, CHO, DHO, EHO, FHO, apoi că se pot aplica $\alpha\beta$ (dar nu și $\alpha\gamma$) succesiv pe AB, BC, CD, DE, EF și FA.

Sînt constatările pe care le-am putea face dacă geometria neeuclidiană ar fi adevărată, dacă

corpurile $\alpha\beta\gamma$, OABCDEFGH ar fi solide invariabile, dacă primul ar fi un triunghi dreptunghic și al doilea o dublă piramidă hexagonală regulată de dimensiuni convenabile.

Aceste constatări noi nu sînt deci posibile dacă corpurile se mișcă după grupul euclidian; dar ele devin posibile dacă se presupune că corpurile se mișcă după grupul lobacevskian. Ele ar fi suficiente deci (dacă le-am face) pentru a dovedi că corpurile în discuție nu se mișcă după grupul euclidian.

Astfel, fără a face nici o ipoteză asupra formei, asupra naturii spațiului, asupra raporturilor corpurilor cu spațiul, fără a atribui corpurilor nici o proprietate geometrică, am făcut constatări care mi-au permis să arăt, într-un caz, că corpurile experimentate se mișcă după un grup a cărui structură este euclidiană, iar în celălalt caz, că ele se mișcă după un grup a cărui structură este lobacevskiană.

Să nu se spună însă că primul set de constatări ar constitui o experiență care dovedește că spațiul este euclidian, iar al doilea set o experiență care dovedește că spațiul este neeuclidian.

Într-adevăr, s-ar putea imagina (spun: imagina) corpuri mișcîndu-se într-un mod care să facă posibilă cea de-a doua serie de constatări. Dovada constă în faptul că primul constructor mecanic venit ar putea să le construiască, dacă ar vrea să-și dea osteneală și ar pune preț pe așa ceva. Totuși, nu veți conchide din aceasta că spațiul este neeuclidian.

Ba chiar, întrucît corpurile solide obișnuite ar continua să existe atunci cînd constructorul mecanic va fi construit corpurile ciudate de care vorbeam adineauri, ar trebui să conchidem că spațiul este în același timp euclidian și neeuclidian.

Să presupunem, de exemplu, că avem o sferă mare cu raza R și că temperatura descrește de la

centru spre suprafața acestei sfere după legea despre care am vorbit cînd am descris lumea neeuclidiană.

Am putea avea corpuri a căror dilatare ar fi neglijabilă și care s-ar comporta ca niște solide invariabile obișnuite; și, pe de altă parte, corpuri extrem de dilatabile și care s-ar comporta ca niște solide neeuclidiene. Am putea avea două duble piramide OABCDEFGH și O'A'B'C'D'E'F'G'H' și două triunghiuri $\alpha\beta\gamma$ și $\alpha'\beta'\gamma'$. Prima dublă piramidă ar fi rectilinie, iar a doua curbilinie; triunghiul $\alpha\beta\gamma$ ar fi făcut dintr-un material nedilatabil, iar celălalt dintr-un material extrem de dilatabil.

S-ar putea face atunci primele constatări cu dubla piramidă OAH și triunghiul $\alpha\beta\gamma$, iar secundele — cu dubla piramidă O'H'A' și triunghiul $\alpha'\beta'\gamma'$. Astfel, experiența ar părea să dovedească mai întîi că geometria euclidiană este adevărată și apoi că ea este falsă.

Experiențele au avut deci ca obiect, nu spațiul, ci corpurile.

Adaus

8. Pentru a fi complet, ar trebui să discut o chestiune foarte delicată și care ar cere ample dezvoltări; mă voi mărgini să rezum aici ceea ce am expus în „Revue de Métaphysique et de Morale" și în „The Monist" Cînd noi spunem că spațiul are trei dimensiuni, ce vrem să spunem de fapt?

Am văzut importanța „schimbărilor interne" care ne sînt revelate de senzațiile noastre musculare. Aceste „schimbări interne" pot servi la caracterizarea diverselor *atitudini* ale corpului nostru. Să luăm în mod arbitrar ca origine una dintre aceste atitudini, A. Cînd trecem de la această atitudine inițială la o altă atitudine oarecare B, noi încer-

căm o serie *S* de senzații musculare, această serie S definind pe B. Să observăm totuși că noi privim deseori două serii S și S′ ca definind o aceeași atitudine B (pentru că atitudinile inițială și finală A și B, rămînînd aceleași, atitudinile intermediare și senzațiile corespunzătoare pot diferi). Cum vom recunoaște noi, așadar, echivalența acestor două serii? Pentru că ele pot servi la compensarea aceleiași schimbări externe, sau, mai general, pentru că, atunci cînd este vorba de a compensa o schimbare externă, una dintre serii poate fi înlocuită prin cealaltă.

Printre aceste serii, le-am deosebit pe acelea care pot ele singure să compenseze o schimbare externă și pe care le-am denumit „deplasări". Cum noi nu putem să deosebim două deplasări care sînt prea apropiate, ansamblul acestor deplasări prezintă caracterele unui continuu fizic; experiența ne spune că sînt acelea ale unui continuu fizic cu șase dimensiuni; dar cum noi încă nu știm cîte dimensiuni are spațiul însuși, trebuie să rezolvăm o altă chestiune.

Ce este un punct din spațiu? Toată lumea crede că știe acest lucru, dar este o iluzie. Ceea ce vedem noi cînd căutăm să ne reprezentăm un punct din spațiu este o pată neagră pe o hîrtie albă, o pată de cretă pe o tablă neagră, este totdeauna un obiect. Chestiunea trebuie deci să fie înțeleasă după cum urmează:

Ce vreau eu să spun cînd afirm că obiectul B este în același punct pe care îl ocupa adineauri obiectul A? Sau, mai mult, ce criteriu îmi va permite să-l recunosc?

Vreau să spun că, *deși nu m-am mișcat din loc* (ceea ce mă informează simțul meu muscular), degetul meu arătător, care adineauri atingea obiectul A, atinge acum obiectul B. Aș fi putut să mă servesc de alte criterii, de exemplu de un alt deget sau de simțul văzului. Dar primul criteriu este suficient; știu că dacă el răspunde da,

toate celelalte criterii vor da același răspuns. O știu *din experiență*, nu pot s-o știu *a priori*. Tot pentru acest motiv spun că pipăitul nu se poate manifesta la distanță; este un alt mod de a enunța același fapt de experiență. Iar dacă spun, din contră, că văzul se manifestă la distanță, vreau să spun că criteriul furnizat de văz poate să răspundă *da*, în timp ce celelalte răspund *nu*.

Și, într-adevăr, obiectul, deși s-a îndepărtat, poate să-și formeze imaginea în același punct al retinei. Văzul răspunde *da*, obiectul a rămas în același punct, iar pipăitul răspunde *nu*, căci degetul meu, care adineauri atingea obiectul, nu-l mai atinge acum. Dacă experiența ne-ar fi arătat că un deget poate răspunde *nu* cînd celălalt spune *da*, am fi spus, la fel, că pipăitul se manifestă la distanță.

În rezumat, pentru fiecare atitudine a corpului meu, degetul meu determină un punct, acest fapt, și numai acest fapt fiind cel ce definește un punct din spațiu.

Fiecărei atitudini îi corespunde astfel un punct; dar se întîmplă deseori că același punct corespunde mai multor atitudini diferite (în acest caz spunem că degetul nostru nu s-a mișcat, dar că s-a mișcat restul corpului). Noi deosebim deci, printre schimbările de atitudine, pe acelea în care degetul nu se mișcă. Cum ajungem la această constatare? Remarcînd frecvent că în astfel de schimbări obiectul care este în contact cu degetul nu părăsește acest contact.

Să plasăm, deci, într-o aceeași clasă toate atitudinile care se deduc unele din altele printr-una din schimbările pe care le-am deosebit astfel. Tuturor atitudinilor dintr-o aceeași clasă le va corespunde același punct din spațiu. Deci, fiecărei clase îi va corespunde un punct și fiecărui punct o clasă. Dar se poate spune că experiența nu abordează punctul, ci această clasă de schim-

bări, sau, mai bine, clasa de senzații musculare corespunzătoare.

Așa încît, atunci cînd noi spunem că spațiul are trei dimensiuni, vrem să spunem numai că ansamblul acestor clase ne apare cu caracterele unui continuu fizic cu trei dimensiuni.

Am putea fi tentați să conchidem că experiența este aceea care ne-a făcut să cunoaștem cîte dimensiuni are spațiul. Dar, în realitate, și aici experiențele noastre au avut ca obiect nu spațiul, ci corpul nostru și raporturile sale cu obiectele învecinate. În plus, ele sînt peste măsură de grosiere.

În spiritul nostru preexista ideea latentă a unui anumit număr de grupuri: sînt acelea a căror teorie a creat-o Lie. Pe care din aceste grupuri îl vom alege noi pentru a face din el un fel de etalon cu care vom compara fenomenele naturale? Și, odată ales acest grup, care este acela dintre sub-grupurile sale pe care îl vom alege pentru a caracteriza un punct din spațiu? Experiența ne-a călăuzit arătîndu-ne ce alegere se adaptează cel mai bine la proprietățile corpului nostru. Dar rolul său s-a mărginit la aceasta.

Experiența ancestrală

S-a spus deseori că, dacă experiența individuală nu a putut crea geometria, nu aceeași este situația cu experiența ancestrală. Dar ce se înțelege prin aceasta? Vrea să spună ea că noi nu putem demonstra experimental postulatul lui Euclid, dar că strămoșii noștri au putut s-o facă? Nicidecum. Vrea să spună că, prin selecție naturală, spiritul nostru s-a *adaptat* la condițiile lumii exterioare, că el a adoptat geometria cea mai *avantajoasă* speciei; sau, în alți termeni, *cea mai comodă*. Toate acestea sînt pe de-a-ntregul conforme cu concluziile noastre: geometria nu este adevărată, ea este avantajoasă,

Partea a treia

Forța

Capitolul VI

Mecanica clasică

Englezii predau mecanica în învățămînt ca o știință experimentală; pe continent, ea este expusă totdeauna mai mult sau mai puțin ca o știință deductivă și *a priori*. Englezii sînt cei ce au dreptate, aceasta se înțelege de la sine; altfel însă, cum s-a putut persevera atît de mult timp în alte greșeli? Pentru ce savanții continentali, care au căutat să scape de obiceiurile înaintașilor lor, nu au reușit, de cele mai multe ori, să se elibereze complet de acestea?

Pe de altă parte, dacă principiile mecanicii nu au altă sursă decît experiența, — nu sînt ele, în consecință, decît aproximative și provizorii? Nu se va putea întîmpla oare ca într-o zi experiențe noi să ne determine să modificăm sau chiar să abandonăm aceste principii?

Acestea sînt întrebările care se ridică în mod firesc, iar dificultatea soluției provine mai ales din faptul că tratatele de mecanică nu deosebesc în mod net între experiență, raționament matematic, convenție și ipoteză.

Și aceasta nu e totul:

1. Nu există spațiu absolut și noi nu concepem decît mișcări relative; cu toate acestea, faptele mecanice se enunță cel mai adesea ca și cum ar exista un spațiu absolut la care am putea să le raportăm;

2. Nu există timp absolut; a spune că două durate sînt egale este o aserțiune care nu are prin ea însăși nici un sens și care nu poate căpăta unul decît prin convenție;

3. Nu numai că noi nu avem intuiția directă a egalității a două durate, dar nu o avem nici măcar pe aceea a simultaneității a două evenimente care se produc în locuri diferite; acestea le-am explicat într-un articol intitulat *Măsurarea timpului*[3];

4. În sfîrșit, geometria noastră euclidiană nu este ea însăși decît un fel de convenție de limbaj; noi am putea să enunțăm faptele mecanice raportîndu-le la un spațiu neeuclidian, care ar fi un reper mai puțin comod, dar tot atît de legitim ca și spațiul nostru obișnuit; enunțul ar deveni astfel mult mai complicat, dar el ar rămîne posibil.

Astfel, spațiul absolut, timpul absolut, geometria chiar nu sînt condiții care se impun mecanicii; toate aceste lucruri nu preexistă mai mult mecanicii decît nu preexistă limba franceză, în mod logic, adevărurilor care sînt exprimate în franțuzește.

S-ar putea căuta să se enunțe legile fundamentale ale mecanicii într-un limbaj care să fie independent de toate aceste convenții; ne-am da mai bine seama astfel, fără îndoială, de ceea ce sînt în sine aceste legi; lucru pe care Andrade a încercat să-l facă, cel puțin în parte, în *Lecții de Mecanică fizică.*

Enunțul acestor legi ar deveni, bineînțeles, mult mai complicat, pentru că toate convențiile au fost imaginate tocmai pentru a scurta și simplifica acest enunț.

Cît despre mine, în afară de ceea ce privește spațiul absolut, voi lăsa de o parte toate aceste

---

[3] *Revue de Métaphysique et de Morale*, t. VI, pp. 1—13 (ianuarie 1898); a se vedea, de asemenea, *Valoarea Științei*, cap. II.

dificultăți; nu pentru că nu le-aș aprecia la justa lor valoare, dimpotrivă; dar le-am examinat suficient în primele două părți.

Voi admite, așadar, *în mod provizoriu* timpul absolut și geometria euclidiană.

Principiul inerției. — Un corp care nu este supus nici unei forțe nu poate avea decît o mișcare rectilinie și uniformă.

Este acesta un adevăr care se impune *a priori* spiritului? Dacă ar fi astfel, cum de l-ar fi ignorat grecii? Cum ar fi putut ei să creadă că mișcarea se oprește de îndată ce încetează cauza care îi dăduse naștere? sau, mai mult, că orice corp, dacă nu intervine nimic care să i se opună, va avea o mișcare circulară, cea mai nobilă dintre toate mișcările?

Dacă se spune că viteza unui corp nu se poate schimba cîtă vreme nu există o cauză pentru aceasta, nu s-ar putea susține la fel de bine că poziția aceluiași corp sau curbura traiectoriei sale nu se poate schimba dacă nu intervine o cauză exterioară care să le modifice?

Principiul inerției, care nu e un adevăr *a priori*, este, așadar, un fapt experimental? Dar s-a experimentat oare vreodată asupra unor corpuri sustrase acțiunii oricărei forțe, și, dacă s-a făcut aceasta, cum s-a știut că aceste corpuri nu erau supuse nici unei forțe? Se citează de obicei exemplul unei bile care se rostogolește foarte mult timp pe o masă de marmură; dar de ce spunem că ea nu este supusă nici unei forțe? Oare pentru că bila este prea îndepărtată de toate celelalte corpuri pentru a putea resimți vreo acțiune sensibilă? Ea nu este totuși mai departe de pămînt, decît dacă am arunca-o liber în aer; și toți știm că, în acest caz, bila ar suferi influența gravitației datorate atracției pămîntului.

Profesorii de mecanică au obiceiul de a trece repede peste exemplul cu bila; dar ei adaugă

că principiul inerției este verificat indirect, prin consecințele sale. Ei se exprimă prost; vor să spună, evident, că se pot verifica diversele consecințe ale unui principiu mai general, principiul inerției nefiind decît un caz particular al acestuia.

Voi propune pentru acest principiu general enunțul următor:

Accelerația unui corp nu depinde decît de poziția acestui corp, de cea a corpurilor vecine și de vitezele lor.

Matematicienii ar spune că mișcările tuturor moleculelor materiale din univers depind de ecuații diferențiale de ordinul al doilea.

Pentru a explica faptul că, într-adevăr, aici avem generalizarea naturală a legii inerției, voi cere să mi se permită o ficțiune. Legea inerției, așa cum am spus mai sus, nu ni se impune *a priori;* alte legi ar fi compatibile, la fel de bine ca și ea, cu principiul rațiunii suficiente. Dacă un corp nu este supus nici unei forțe, în loc de a presupune că viteza sa nu se schimbă, s-ar putea presupune că poziția sau accelerația sa este cea care nu trebuie să se schimbe.

Ei bine, să ne imaginăm un moment că una dintre aceste două legi ipotetice este aceea a naturii și că ea înlocuiește legea noastră a inerției. Care ar fi generalizarea naturală? Un minut de reflecție ne-o va arăta.

În primul caz, ar trebui să presupunem că viteza unui corp nu depinde decît de poziția sa și de cea a corpurilor învecinate; în cel de-al doilea caz, că variația accelerației unui corp nu depinde decît de poziția acestui corp și a corpurilor învecinate, de vitezele și de accelerațiile lor.

Sau, pentru a ne exprima în limbajul matematic, ecuațiile diferențiale ale mișcării ar fi de ordinul întîi în primul caz și de ordinul al treilea în cel de-al doilea caz.

Să modificăm puțin ficțiunea noastră. Presupun o lume analoagă cu sistemul nostru solar,

dar în care, datorită unui ciudat hazard, orbitele tuturor planetelor sînt fără excentricitate și fără înclinație. Presupun în plus că masele acestor planete sînt prea mici pentru ca perturbațiile lor reciproce să fie sensibile. Astronomii care ar locui pe una dintre aceste planete vor conchide că orbita unui astru nu poate fi decît circulară și paralelă cu un anumit plan ; poziția unui astru la un moment dat ar fi suficientă atunci pentru a-i determina viteza și întreaga traiectorie. Legea inerției pe care ar adopta-o astronomii ar fi prima dintre cele două legi ipotetice de care vorbeam adineauri.

Să ne imaginăm acum că într-o zi acest sistem ar fi traversat cu o mare viteză de către un corp cu masă, de asemenea, mare, venit din constelații îndepărtate. Toate orbitele vor fi profund tulburate. Astronomii noștri nu ar fi încă prea uimiți, căci ei ar ghici că această situație se datorește numai astrului nou. Dar, ar spune ei, cînd el se va fi îndepărtat, ordinea se va restabili de la sine ; fără îndoială că distanțele planetelor pînă la soare nu vor mai fi aceleași ca înainte de cataclism, dar orbitele vor redeveni circulare.

Numai cînd corpul perturbator ar fi departe, și cînd totuși orbitele, în loc de a redeveni circulare, ar deveni eliptice, numai atunci acești astronomi și-ar da seama de eroarea lor și de necesitatea de a reface întreaga lor mecanică.

Am insistat asupra acestor ipoteze căci mi se pare că nu se poate înțelege bine ceea ce este legea noastră generalizată a inerției decît opunînd-o unei ipoteze contrarii.

Acum, în ceea ce privește această lege a inerției generalizată, a fost și poate fi ea verificată prin experiență? Cînd a scris *Principiile,* Newton considera acest adevăr ca dobîndit și ca demonstrat experimental. El aprecia astfel nu numai prin idolul antropomorfic, despre care vom mai vorbi, dar și prin lucrările

lui Galileu. De asemenea, prin legile lui Kepler; într-adevăr, după aceste legi, traiectoria unei planete este în întregime determinată de poziția sa inițială și de viteza sa inițială; este tocmai ceea ce pretinde principiul nostru al inerției generalizat.

Pentru ca acest principiu să nu fie decît aparent adevărat și să ne fie teamă că va fi nevoie să-l înlocuim într-o zi cu unul din principiile analoage pe care i le opuneam adineauri, ar trebui ca noi să fi fost înșelați de vreun hazard surprinzător, asemenea aceluia care, în ficțiunea pe care o expuneam mai sus, îi indusese în eroare pe astronomii noștri imaginari.

O asemenea ipoteză este prea neverosimilă pentru a ne opri asupra ei. Nimeni nu va crede că pot exista asemenea hazarduri; fără îndoială, probabilitatea ca două excentricități să fie nule, trecînd peste erorile de observație, nu este mai mică decît probabilitatea ca una să fie egală cu 0,1, de exemplu, și cealaltă cu 0,2, neglijînd erorile de observație. Probabilitatea unui eveniment simplu nu este mai mică decît aceea a unui eveniment complicat; și totuși, dacă evenimentul simplu are loc, noi nu vrem să credem că natura a făcut astfel pentru a ne înșela. Ipoteza unei erori de acest fel fiind îndepărtată, se poate admite, așadar, că, în ceea ce privește astronomia, legea noastră a fost verificată de către experiență.

Dar astronomia nu este întreaga fizică.

Nu ne-am putea oare teme că o experiență nouă ar putea infirma într-o zi legea în vreo secțiune a Fizicii? O lege a experienței este totdeauna supusă revizuirii; trebuie să ne așteptăm totdeauna să o vedem înlocuită cu o altă lege mai precisă.

Cu toate acestea, nimeni nu se teme în mod serios că legea despre care vorbim va trebui să fie vreodată abandonată sau modificată. Pentru

ce? Tocmai pentru că nu se va putea niciodată să fie supusă unei probe decisive.

Mai întîi, pentru ca această probă să fie completă, ar trebui ca după un anumit timp toate corpurile din univers să revină la pozițiile lor inițiale cu vitezele lor inițiale. S-ar vedea atunci dacă, cu începere din acest moment, ele își reiau traiectoriile pe care le-au avut înainte.

Dar această probă este imposibilă; ea nu poate fi efectuată decît parțial și, oricît de bine ar fi efectuată, vor exista totdeauna cîteva corpuri care nu vor reveni la poziția lor inițială; astfel, orice derogare de la lege își va găsi cu ușurință explicația.

Aceasta nu este însă totul: în Astronomie, noi *vedem* corpurile ale căror mișcări le studiem și admitem de cele mai multe ori că ele nu suferă acțiunea altor corpuri invizibile. În aceste condiții, trebuie într-adevăr ca legea noastră să se verifice sau să nu se verifice.

Dar în Fizică nu se întîmplă la fel: dacă fenomenele fizice sînt datorate mișcărilor, ele sînt datorate mișcărilor de molecule pe care noi nu le observăm. Atunci, dacă accelerația unuia dintre corpurile pe care le vedem ni se pare că depinde de *altceva* decît de pozițiile sau de vitezele celorlalte corpuri vizibile ori ale moleculelor invizibile, a căror existență am fost determinați anterior s-o admitem, nimic nu ne va împiedica să presupunem că acest *altceva* este poziția sau viteza altor molecule, a căror prezență nu o bănuisem pînă atunci. Legea va fi salvată.

Să mi se permită să întrebuințez un moment limbajul matematic pentru a exprima aceeași idee sub o altă formă. Presupun că observăm n molecule și constatăm că cele $3n$ coordonate ale lor satisfac un sistem de $3n$ ecuații diferențiale de ordinul al patrulea (și nu de ordinul al doilea, cum ar cere legea inerției). Știm că, introducînd $3n$ variabile auxiliare, un sistem de $3n$

ecuații de ordinul al patrulea poate fi redus la un sistem de 6 n ecuații de ordinul al doilea. Dacă presupunem atunci că aceste 3 n variabile auxiliare reprezintă coordonatele a n molecule invizibile, rezultatul este din nou conform cu legea inerției.

În rezumat, această lege, verificată experimental în cîteva cazuri particulare, poate fi extinsă fără teamă la cazurile cele mai generale, pentru că noi știm că în aceste cazuri generale experiența nu mai poate nici să o confirme, nici să o contrazică.

Legea accelerației. — Accelerația unui corp este egală cu forța care acționează asupra lui împărțită la masa sa.

Poate fi verificată această lege prin experiență?

Ar trebui să se măsoare cele trei mărimi din enunț: accelerația, forța și masa.

Admit că se poate măsura accelerația, pentru că trec peste dificultatea provenind din măsurarea timpului. Dar cum să măsori forța, sau masa? Noi nici nu știm ce sînt acestea.

Ce este *masa?* Este produsul dintre volum și densitate, răspunde Newton. — Ar fi preferabil să se spună, răspund Thomson și Tait, că densitatea este cîtul dintre masă și volum. — Ce este *forța?* Este o cauză care produce mișcarea unui corp sau care tinde să o producă din nou, răspunde Lagrange. — Este produsul dintre masă și *accelerație*, va spune Kirchhoff. Însă, atunci, pentru ce să nu se spună că masa este cîtul dintre forță și accelerație?

Aceste dificultăți sînt inextricabile.

Cînd se spune că forța este cauza unei mișcări, se face metafizică, și dacă ar trebui să ne mulțumim cu ea, această definiție ar fi absolut sterilă. Pentru ca definiția să poată servi la ceva, trebuie ca ea să ne învețe să *măsurăm* forța; ar fi suficient; nu e nicidecum necesar ca ea să

ne informeze ce este forța *în sine*, nici dacă ea este cauza sau efectul mișcării.

Trebuie, deci, să definim mai întîi egalitatea a două forțe. Cînd vom spune că două forțe sînt egale? Atunci cînd, aplicate la o aceeași masă, ele îi imprimă o aceeași accelerație, sau cînd, opuse direct una alteia, ele trec în starea de echilibru. Această definiție este înșelătoare. Nu se poate detașa o forță aplicată unui corp pentru a o atașa unui alt corp așa cum se detașează o locomotivă pentru a o atașa la un alt tren. Este deci imposibil să se știe ce accelerație ar imprima o forță care acționează asupra unui corp, *dacă* ea ar fi aplicată unui alt corp. Este imposibil să se știe cum s-ar comporta două forțe care nu sînt direct opuse, *dacă* ele ar fi direct opuse.

Această definiție se caută a se concretiza atunci cînd se măsoară o forță cu un dinamometru, sau cînd ea este echilibrată printr-o greutate. Două forțe — F și F' — pe care le voi presupune verticale și îndreptate de jos în sus, pentru a simplifica, sînt aplicate la două corpuri C și C'; agăț un corp greu P mai întîi de corpul C, apoi de corpul C'; dacă echilibrul are loc în cele două cazuri, voi conchide că cele două forțe F și F' sînt egale între ele, pentru că amîndouă sînt egale cu greutatea corpului P.

Dar sînt eu sigur că corpul P a păstrat aceeași greutate cînd l-am mutat de la primul corp la al doilea? Nicidecum, *sînt sigur de contrariu;* știu că intensitatea gravitației variază de la un punct la altul, că ea este mai mare, de exemplu, la pol decît la ecuator. Fără îndoială, diferența este foarte mică și, în practică, nu voi ține seamă de ea, dar o definiție bine elaborată ar trebui să aibă o rigoare matematică; această rigoare nu există. Ceea ce spun despre greutate se aplică, evident, și forței resortului unui dinamometru, pe care temperatura și o mulțime de circumstanțe o pot face să varieze.

Dar aceasta nu este totul: nu se poate spune că greutatea corpului P este aplicată corpului C, echilibrînd direct forța F. Ceea ce este aplicat corpului C, este acțiunea A a corpului P asupra corpului C; corpul P este supus, în ceea ce îl privește, pe de o parte greutății sale, pe de altă parte reacției R a corpului C asupra lui P. În definitiv, forța F este egală cu forța A, pentru că ea o echilibrează; forța A este egală cu R în virtutea principiului egalității acțiunii și reacției; în sfîrșit, forța R este egală cu greutatea lui P, pentru că ea o echilibrează. Din aceste trei egalități noi deducem ca o consecință egalitatea dintre F și greutatea lui P.

Sîntem, așadar, obligați să facem să intervină în definiția egalității a două forțe însuși principiul egalității acțiunii și reacției; *judecînd astfel, acest principiu nu ar mai trebui să fie considerat ca o lege experimentală, ci ca o definiție.*

Iată-ne, deci, pentru a recunoaște egalitatea a două forțe, în posesia a două reguli: egalitatea a două forțe care sînt în echilibru; egalitatea acțiunii și reacției. Dar, după cum am văzut mai sus, aceste două reguli sînt insuficiente; sîntem obligați să recurgem la o a treia regulă și să admitem că anumite forțe, ca, de exemplu, greutatea unui corp, sînt constante în mărime și în direcție. Dar această a treia regulă, am spus-o, este o lege a experienței; ea nu este decît aproximativ adevărată, *ea este o definiție rea.*

Sîntem, așadar, conduși la definiția lui Kirchhoff: *forța este egală cu masa multiplicată cu accelerația.* Această „lege a lui Newton" încetează, la rîndul său, de a fi considerată ca o lege experimentală, ea nu mai este decît o definiție. Dar această definiție este încă insuficientă, pentru că noi nu știm ce este masa. Ea ne permite, fără îndoială, să calculăm raportul dintre două forțe aplicate unui aceluiași corp în momente diferite,

dar nu ne informează nimic despre raportul dintre două forțe aplicate la două corpuri diferite.

Pentru a o completa, trebuie să recurgem din nou la cea de-a treia lege a lui Newton (egalitatea dintre acțiune și reacție), considerată încă nu ca o lege experimentală, ci ca o definiție. Două corpuri A și B acționează unul asupra altuia; accelerația lui A multiplicată cu masa lui A este egală cu acțiunea lui B asupra lui A; la fel, produsul accelerației lui B cu masa sa este egal cu reacția lui A asupra lui B. Cum, prin definiție, acțiunea este egală cu reacția, masele lui A și B sînt în raport invers cu accelerațiile acestor două corpuri. Iată raportul dintre aceste două mase definit, experienței revenindu-i sarcina să verifice dacă acest raport este constant.

Lucrurile ar sta foarte bine dacă cele două corpuri A și B ar fi singure față în față și nesupuse altor acțiuni exterioare. Dar nu e deloc așa; accelerația lui A nu este datorată numai acțiunii lui B, ci aceleia a unei mulțimi de alte corpuri C, D ... Pentru a aplica regula precedentă, trebuie deci să descompunem accelerația lui A în mai multe componente și să discernem care este aceea dintre aceste componente care este datorată acțiunii lui B.

Această descompunere ar fi încă posibilă dacă *am admite* că acțiunea lui C asupra lui A se adaugă în mod simplu la aceea a lui B asupra lui A fără ca prezența corpului C să modifice acțiunea lui B asupra lui A sau ca prezența lui B să modifice acțiunea lui C asupra lui A; dacă am admite, prin urmare, că două corpuri oarecare se atrag, că acțiunea lor mutuală este dirijată după dreapta care le unește și nu depinde decît de distanța lor; dacă am admite, într-un cuvînt, *ipoteza forțelor centrale.*

Se știe că, pentru a determina masele corpurilor cerești, se folosește un principiu cu totul diferit. Legea gravitației ne informează că atrac-

ția dintre două corpuri este proporțională cu masele lor; dacă r este distanța lor, m și m' masele lor, k o constantă, atracția lor va fi

$$\frac{kmm'}{r^2}$$

Ceea ce se măsoară atunci, nu este masa, raportul dintre forță și accelerație, ci masa de atracție; nu inerția corpului, ci puterea sa de atracție.

Acesta este un procedeu indirect, a cărui utilizare nu este teoretic indispensabilă. S-ar fi putut foarte bine să se întîmple ca atracția să fie invers proporțională cu pătratul distanței fără a fi proporțională cu produsul maselor, ca ea să fie egală cu:

$$\frac{f}{r^2}$$

dar fără să avem:

$$f = kmm'$$

Dacă lucrurile ar sta astfel, s-ar putea totuși, prin observarea mișcărilor *relative* ale corpurilor cerești, să se măsoare masele acestor corpuri.

Dar avem noi oare dreptul să admitem ipoteza forțelor centrale? Este această ipoteză riguros exactă? Este sigur că ea nu va fi niciodată contrazisă de experiență? Cine ar îndrăzni să o afirme? Și dacă trebuie să abandonăm această ipoteză, întregul edificiu înălțat cu atîta greutate se va prăbuși.

Noi nu mai avem dreptul să vorbim despre componenta accelerației lui A care se datorește acțiunii lui B. Nu avem nici un mijloc de a o deosebi pe aceasta de componenta care se datorește acțiunii lui C sau a unui alt corp. Regula pentru măsurarea maselor devine inaplicabilă.

Ce rămîne atunci din principiul egalității acțiunii și reacției? Dacă ipoteza forțelor centrale este respinsă, acest principiu trebuie, evident, să fie enunțat astfel: rezultanta geometrică a tuturor forțelor aplicate diverselor corpuri ale unui sistem sustras oricărei acțiuni exterioare va fi nulă. Sau, cu alți termeni, *mișcarea centrului de gravitație a acestui sistem va fi rectilinie și uniformă.*

Iată, se pare, un mijloc pentru a defini masa; poziția centrului de gravitație depinde, evident, de valorile atribuite maselor; va trebui să dispunem de aceste valori astfel încît mișcarea acestui centru de gravitație să fie rectilinie și uniformă; acest fapt va fi totdeauna posibil dacă cea de-a treia lege a lui Newton este adevărată, și nu va fi posibil, în general, decît într-un singur mod.

Dar nu există sistem sustras oricărei acțiuni exterioare; toate părțile universului suferă mai mult sau mai puțin puternic acțiunea tuturor celorlalte părți. *Legea mișcării centrului de gravitație nu este riguros adevărată decît dacă este aplicată universului în întregime.*

Dar atunci ar trebui, pentru a extrage de aici valorile maselor, să se observe mișcarea centrului de gravitație al Universului. Absurditatea acestei consecințe este evidentă; noi nu cunoaștem decît mișcări relative; mișcarea centrului de gravitație al Universului va rămîne pentru noi o eternă necunoscută.

Nu rămîne, așadar, nimic și eforturile noastre au fost infructuoase; sîntem constrînși la definiția următoare, care nu este decît o mărturisire a neputinței: *masele sînt coeficienți pe care este comod să-i introduci în calcule.*

Am putea să refacem întreaga mecanică atribuind tuturor maselor valori diferite. Această mecanică nouă nu ar fi în contradicție nici cu experiența, nici cu principiile generale ale dinamicii (principiul inerției, proporționalitatea forțelor

cu masele și cu accelerațiile, egalitatea dintre acțiune și reacție, mișcarea rectilinie și uniformă a centrului de gravitație, principiul ariilor).

Numai că ecuațiile acestei mecanici noi ar fi *mai puțin simple*. Să ne înțelegem bine: numai primii termeni ar fi mai puțin simpli, adică aceia pe care experiența ni i-a făcut deja cunoscuți; s-ar putea denatura eventual masele cu mici cantități, fără ca ecuațiile *complete* să cîștige sau să piardă în simplitate.

Hertz s-a întrebat dacă principiile mecanicii sînt riguros adevărate. „În opinia multor fizicieni, spune el, va apărea de neconceput ca experiența cea mai îndepărtată să poată vreodată să schimbe ceva în principiile de nezdruncinat ale mecanicii; și totuși, ceea ce rezultă din experiență poate totdeauna să fie rectificat de către experiență".

După cele ce am spus mai sus, aceste temeri vor părea superflue. Principiile dinamicii ne apar mai întîi ca adevăruri ale experienței; dar am fost obligați să ne servim de ele ca definiții. *Prin definiție*, forța este egală cu produsul dintre masă și accelerație; iată un principiu care va rezista oricărei experiențe ulterioare. Prin definiție, de asemenea, acțiunea este egală cu reacția.

Dar atunci, se va spune, aceste principii neverificabile sînt absolut vide de orice semnificație; experiența nu poate să le contrazică; dar ele nu pot să ne învețe nimic util; la ce bun atunci să studiem dinamica?

Această condamnare rapidă ar fi nejustă. În natură nu există sistem *perfect* izolat, perfect sustras oricărei acțiuni exterioare; există însă sisteme *aproape* izolate.

Dacă se observă un asemenea sistem, se poate studia nu numai mișcarea relativă a diverselor sale părți una în raport cu alta, dar și mișcarea centrului său de gravitație în raport cu celelalte părți ale universului. Se constată atunci că miș-

carea acestui centru de gravitație este *aproape* rectilinie și uniformă, conform cu cea de-a treia lege a lui Newton.

Avem aici un adevăr experimental, dar el nu va putea fi infirmat de experiență; ce ne-ar informa, într-adevăr, o experiență mai precisă? Ne-ar informa că legea nu era decît aproape adevărată; dar acest lucru noi îl știam deja.

Acum se explică cum a putut servi experiența ca bază a principiilor mecanicii, ea neputînd să le contrazică vreodată.

Mecanica antropomorfică. — Kirchhoff, se va spune, nu a făcut decît să se supună tendinței generale a matematicienilor către nominalism; abilitatea sa de fizician nu l-a apărat de aceasta. El a ținut să dea o definiție a forței, considerînd în acest scop prima propoziție întîlnită; dar noi nu avem nevoie de o definiție a forței: ideea de forță este o noțiune primitivă, ireductibilă, indefinisabilă; știm cu toții ce este forța, avem intuiția ei directă.

Această intuiție directă provine din noțiunea de efort, care ne este familiară din copilărie.

Dar, mai întîi, chiar dacă această intuiție directă ne-ar face să cunoaștem veritabila natură a forței în sine, ea ar fi insuficientă pentru a funda Mecanica; ar fi chiar cu totul inutilă. Ceea ce are importanță nu este faptul de a ști ce este forța, ci faptul de a ști să o măsori.

Tot ceea ce nu ne învață să o măsurăm este tot atît de inutil pentru mecanician, pe cît este, de exemplu, noțiunea subiectivă de cald și de rece pentru fizicianul care studiază căldura. Această noțiune subiectivă nu se poate traduce în numere, deci ea nu servește la nimic; un savant a cărui piele ar fi absolut rea conducătoare de căldură și care, prin urmare, nu ar fi încercat niciodată nici senzația de rece, nici cea de cald, ar putea să citească un termometru la fel de bine

ca oricare alt om, acest lucru fiindu-i suficient pentru a construi întreaga teorie a căldurii.

Or, noțiunea imediată de efort nu ne poate servi pentru a măsura forța; este limpede, de exemplu, că va fi mai mare osteneala mea decît a unui om obișnuit să transporte greutăți mari atunci cînd voi ridica o greutate de cincizeci de kilograme.

Mai mult, noțiunea de efort nu ne dezvăluie natura veritabilă a forței; ea se reduce, în definitiv, la o reprezentare de senzații musculare, în timp ce nu se poate susține că soarele încearcă o senzație musculară cînd atrage pămîntul.

Tot ceea ce se poate căuta aici este un simbol, mai puțin precis și mai puțin comod decît săgețile de care se slujesc geometrii, dar tot atît de îndepărtat de realitate.

Antropomorfismul a jucat un rol istoric considerabil în geneza mecanicii; poate că el va procura încă uneori un simbol care va părea comod cîtorva spirite; dar el nu poate funda nimic care să aibă un caracter cu adevărat științific sau un caracter cu adevărat filosofic.

„**Școala Firului**" — Andrade, în ale sale *Lecții de Mecanică fizică*, a întinerit mecanica antropomorfică. Școlii de mecanicieni din care face parte Kirchhoff, el îi opune, denumind-o destul de bizar, școala firului.

Această școală caută să reducă totul la „considerarea anumitor sisteme materiale de masă neglijabilă, examinate în starea de tensiune și capabile să transmită eforturi considerabile unor corpuri îndepărtate, sisteme al căror tip ideal este *firul*".

Un fir care transmite o forță oarecare se alungește ușor sub acțiunea acestei forțe; direcția firului ne face să cunoaștem direcția forței, a cărei mărime este măsurată prin alungirea firului.

Se poate concepe atunci o experiență cum este cea care urmează. Un corp A este legat de

un fir; la cealaltă extremitate a firului se face să acționeze o forță oarecare, căreia i se imprimă o variație pînă ce firul capătă o alungire a; se notează accelerația corpului A; se detașează A și se atașează corpul B de același fir, se face din nou să acționeze forța, sau o altă forță, și i se imprimă o variație pînă ce firul capătă din nou alungirea a; se notează accelerația corpului B. Se reia experiența atît cu corpul A, cît și cu corpul B, dar astfel încît firul să ia alungirea β. Cele patru accelerații observate trebuie să fie proporționale. Se obține astfel o verificare experimentală a legii accelerației enunțată mai sus.

Sau: se supune un corp acțiunii simultane a mai multor fire identice întinse în mod egal și se caută, prin experiență, să se afle care trebuie să fie orientările tuturor acestor fire pentru ca corpul să rămînă în echilibru. Se obține astfel o verificare experimentală a regulii compunerii forțelor.

Dar, într-un cuvînt, ce am făcut noi? Am definit forța la care este supus firul prin deformarea suferită de acest fir, ceea ce este destul de rezonabil; am admis apoi că, dacă un corp este legat de acest fir, efortul care îi este transmis prin fir este egal cu acțiunea pe care acest corp o exercită asupra acestui fir; în definitiv, ne-am servit de principiul egalității acțiunii și reacției, considerîndu-l nu ca pe un adevăr de experiență, ci ca pe însăși definiția forței.

Această definiție este tot atît de convențională ca și aceea a lui Kirchhoff, dar ea este mult mai puțin generală.

Nu toate forțele sînt transmise prin fire (în plus, ar trebui, pentru a putea fi comparate, ca ele să fie transmise toate prin fire identice). Dacă s-ar admite chiar că pămîntul este legat de soare prin vreun fir invizibil, cel puțin se va recunoaște că nu avem nici un mijloc de a-i măsura alungirea.

De nouă ori din zece, prin urmare, definiția noastră ar comite o greșeală; nu i s-ar putea atribui nici un fel de sens, și ar trebui să ne reîntoarcem la definiția lui Kirchhoff.

Atunci pentru ce să se aleagă această cale ocolită? Veți admite o anumită definiție a forței, care nu are sens decît în anumite cazuri particulare. În astfel de cazuri veți verifica prin experiență că ea conduce la legea accelerației. Autorizați de această experiență, veți lua apoi legea accelerației ca definiție a forței în toate celelalte cazuri.

Nu ar fi mai simplu să considerăm legea accelerației ca o definiție în toate cazurile și să privim experiențele în chestiune nu ca verificări ale acestei legi, ci ca verificări ale principiului reacției sau ca demonstrînd că deformările unui corp elastic nu depind decît de forțele la care este supus acest corp?

Fără a socoti că acele condiții în care definiția lui Andrade ar putea fi acceptată nu sînt niciodată îndeplinite decît în mod imperfect, că un fir nu este niciodată fără masă, că el nu este niciodată sustras oricăror altor forțe decît reacției corpurilor atașate la extremitățile sale.

Ideile lui Andrade sînt totuși foarte interesante; dacă ele nu satisfac nevoia noastră de logică, ne fac măcar să înțelegem mai bine geneza noțiunilor fundamentale de mecanică. Reflecțiile pe care ni le sugerează ele ne arată cum s-a ridicat spiritul omenesc de la un antropomorfism naiv la concepțiile actuale ale științei.

Vedem la punctul de plecare o experiență cu totul particulară și destul de grosieră; la punctul de sosire, o lege cu totul generală, foarte precisă, și a cărei certitudine o considerăm ca absolută. O astfel de certitudine, noi sîntem aceia care i-am conferit-o — pentru a spune astfel — în mod liber, considerînd-o ca o convenție.

Așadar, legea accelerației, regula compunerii forțelor nu sînt decît convenții arbitrare? Convenții, da; arbitrare, nu; ele ar fi astfel dacă s-ar nesocoti experiențele care i-au determinat pe fondatorii științei să le adopte și care, oricît de imperfecte ar fi ele, sînt suficiente pentru a le susține. Este bine că, din timp în timp, ni se îndreaptă din nou atenția către originea experimentală a acestor convenții.

Capitolul VII

Mișcarea relativă și mișcarea absolută

Principiul mișcării relative. — S-a căutat uneori să se subordoneze legea accelerației unui principiu mai general. Mișcarea unui sistem oarecare trebuie să asculte de aceleași legi, să fie raportată la axe fixe sau la axe mobile antrenate într-o mișcare rectilinie și uniformă. Acesta este principiul mișcării relative, care ni se impune pentru două rațiuni: mai întîi, experiența cea mai obișnuită îl confirmă, apoi ipoteza contrarie este respinsă de intelect.

Să admitem, așadar, acest principiu și să considerăm un corp supus unei forțe; mișcarea relativă a acestui corp, în raport cu un observator animat de o viteză uniformă egală cu viteza inițială a corpului, va trebui să fie identică cu ceea ce ar fi mișcarea sa absolută dacă corpul ar porni din starea de repaos. S-a conchis de aici că accelerația corpului nu trebuie să depindă de viteza sa absolută; s-a căutat chiar să se obțină de aici o demonstrație a legii accelerației.

Au existat multă vreme ecouri ale acestei demonstrații în programele bacalaureatului în științe. Este evident că o astfel de tentativă de a explica legea accelerației este zadarnică. Obstacolul care ne împiedica să demonstrăm

această lege consta în faptul că nu aveam o definiție a forței; acest obstacol a continuat să existe în întregime, pentru că principiul invocat nu ne furniza definiția care ne lipsea.

Principiul mișcării relative nu e nici el mai puțin interesant și merită să fie studiat pentru el însuși. Să căutăm mai întîi să-l enunțăm într-un mod precis.

Am spus mai sus că accelerațiile diferitelor corpuri care fac parte dintr-un sistem izolat nu depind decît de vitezele și de pozițiile lor relative, iar nu de vitezele și de pozițiile lor absolute, cu condiția ca axele mobile la care este raportată mișcarea relativă să fie antrenate într-o mișcare rectilinie și uniformă. Sau, dacă preferăm, accelerațiile lor nu depind decît de diferențele vitezelor și coordonatelor lor, iar nu de valorile absolute ale acestor viteze și coordonate.

Dacă acest principiu este adevărat pentru accelerațiile relative sau, mai bine zis, pentru diferențele de accelerație, combinîndu-l cu legea reacției se va deduce de aici că el este adevărat și pentru accelerațiile absolute.

Rămîne deci de văzut cum se poate demonstra că diferențele accelerațiilor nu depind decît de diferențele vitezelor și ale coordonatelor sau, pentru a vorbi în limbajul matematic, că aceste diferențe de coordonate satisfac ecuații diferențiale de ordinul al doilea.

Poate fi dedusă această demonstrație din experiențe sau din considerații *a priori?*

Reamintindu-ne ceea ce am spus mai sus, cititorul va da el însuși răspunsul.

Astfel enunțat, într-adevăr, principiul mișcării relative seamănă foarte mult cu ceea ce denumeam mai sus principiul inerției generalizat; el nu este cu totul același lucru pentru că este vorba de diferențe de coordonate și nu de coordonatele înseși. Noul principiu ne face deci să cunoaș-

tem ceva în plus față de cel vechi, dar se aplică aici aceeași discuție și ea ne-ar conduce la aceleași concluzii; este inutil să revenim.

Argumentul lui Newton. — Întîlnim aici o chestiune foarte importantă și chiar puțin tulburătoare. Am spus că principiul mișcării relative nu e numai pentru noi un rezultat de experiență, și că *a priori* orice ipoteză contrară ar fi respinsă de intelect.

Dar atunci pentru ce principiul nu este adevărat decît dacă mișcarea axelor mobile este rectilinie și uniformă? Se pare că el ar trebui să ni se impună cu aceeași forță dacă această mișcare este variată sau cel puțin dacă ea se reduce la o rotație uniformă. Or, în aceste două cazuri, principiul nu este adevărat.

Nu voi insista mult asupra cazului în care mișcarea axelor este rectilinie fără a fi uniformă; paradoxul nu rezistă nici la cel mai rapid examen. Dacă sînt într-un vagon, și dacă trenul, izbindu-se de un obstacol oarecare, se oprește brusc, voi fi proiectat pe bancheta opusă, deși eu nu am fost supus direct la nici o forță. Nu e nimic misterios aici; dacă eu nu am suferit acțiunea nici unei forțe exterioare, trenul în schimb a suportat un șoc exterior. Faptul că mișcarea relativă a două corpuri este afectată de îndată ce mișcarea unuia sau a altuia este modificată datorită unei cauze exterioare nu poate însemna nimic paradoxal aici.

Mă voi opri mai mult asupra cazului mișcărilor relative raportate la axe care se rotesc cu o mișcare de rotație uniformă. Dacă cerul ar fi necontenit acoperit de nori, dacă nu am avea nici un mijloc pentru a observa astrele, noi am putea, totuși, să conchidem că pămîntul se rotește; am fi informați despre aceasta datorită aplatizării sale sau prin experiența pendulului lui Foucault.

Şi totuşi, în acest caz, să spui că pămîntul se roteşte are vreun sens? Dacă nu există spaţiu absolut, se poate roti oare pămîntul fără a se afla în raport cu ceva, iar, pe de altă parte, cum am putea admite noi concluzia lui Newton şi să credem în spaţiul absolut?

Dar nu este suficient să se constate că toate soluţiile posibile ne şochează în aceeaşi măsură; trebuie să analizăm pentru fiecare dintre ele raţiunile respingerii noastre, pentru a ne face alegerea în cunoştinţă de cauză. Se va înţelege, în consecinţă, sensul lungii discuţii ce va urma.

Să reluăm ficţiunea noastră: nori deşi ascund aştrii ochilor oamenilor, care nu pot să-i observe, ignorîndu-le astfel chiar existenţa; cum vor şti oare aceşti oameni că pămîntul se roteşte? Mai mult decît strămoşii noştri, ei vor considera solul pe care calcă fix şi neclintit; ei vor aştepta mult mai mult timp venirea unui Copernic. Dar, în fine, acest Copernic, pînă în cele din urmă, tot ar veni; cum ar apărea el?

Mecanicienii acestei lumi nu s-ar izbi mai întîi de o contradicţie absolută. În teoria mişcării relative se consideră, în afara forţelor reale, două forţe fictive care sînt denumite forţa centrifugă obişnuită şi forţa centrifugă compusă. Savanţii noştri imaginari ar putea deci să explice totul considerînd aceste două forţe ca reale, şi ei nu ar vedea aici vreo contradicţie cu principiul inerţiei generalizat, căci aceste forţe ar depinde, una de poziţiile relative ale diverselor părţi ale sistemului, ca atracţiile reale, cealaltă de vitezele lor relative, ca frecările reale.

Totuşi, nu ar întîrzia să le fie trezită atenţia de multe dificultăţi; dacă ei ar reuşi să realizeze un sistem izolat, centrul de gravitaţie al acestui sistem nu ar avea o traiectorie aproape rectilinie. Ei ar putea invoca, pentru a explica acest fapt, forţele centrifuge, pe care le-ar considera ca reale

și pe care le-ar atribui, fără îndoială, acțiunilor dintre ele ale corpurilor. Numai că ei nu ar vedea aceste forțe anulîndu-se la distanțe mari, adică pe măsură ce izolarea ar fi realizată mai bine; departe de aceasta: forța centrifugă ar crește în mod indefinit cu distanța.

Această dificultate le-ar părea destul de importantă; și totuși, ea nu i-ar stînjeni multă vreme: ei ar imagina curînd vreun mediu foarte subtil, analog cu eterul nostru, în care toate corpurile s-ar scălda și care ar exercita asupra lor o acțiune repulsivă.

Dar aceasta nu e totul! Spațiul este simetric, și totuși legile mișcării nu ar prezenta simetrie; ele ar trebui să distingă între dreapta și stînga. S-ar vedea, de exemplu, că ciclonii se rotesc totdeauna în același sens, în timp ce, datorită simetriei, acești meteori ar trebui să se rotească indiferent, într-un sens și în celălalt. Dacă savanții noștri ar ajunge prin îndelungate strădanii să facă universul lor perfect simetric, această simetrie nu ar subzista, deși nu există nici o rațiune aparentă pentru ca ea să fie tulburată într-un sens mai degrabă decît în celălalt.

Fără nici o îndoială că ei ar ieși din încurcătură, ar inventa ceva care nu ar fi mai neobișnuit decît sferele de sticlă ale lui Ptolemeu, și s-ar merge astfel, acumulînd complicațiile, pînă ce Copernic cel așteptat le va anula pe toate, dintr-o dată, spunînd: Este mult mai simplu să se admită că pămîntul se rotește.

Și la fel cum Copernic al nostru ne-a spus: Este mai comod de presupus că pămîntul se rotește, pentru că legile astronomiei se exprimă astfel într-un limbaj mult mai simplu, celălalt ar spune: Este mai comod de presupus că pămîntul se rotește, pentru că legile mecanicii se exprimă astfel într-un limbaj mult mai simplu.

Aceasta nu împiedică faptul ca spațiul absolut, adică reperul la care ar trebui să raportăm pămîntul pentru a ști dacă realmente el se rotește, să nu aibă nici o existență obiectivă. Prin urmare, afirmația: „pămîntul se rotește" nu are nici un sens, pentru că nici o experiență nu va permite ca ea să fie verificată; pentru că o atare experiență nu numai că nu ar putea fi nici realizată, nici visată de cel mai îndrăzneț Jules Verne, dar nu va putea fi concepută fără contradicție; sau, mai curînd, aceste două propoziții: „pămîntul se rotește", și: „este mai comod de presupus că pămîntul se rotește", au un singur și același sens; nu există nimic în plus într-una față de cealaltă.

Poate că toate cele expuse nu vor fi considerate mulțumitoare, găsindu-se supărător faptul că, printre toate ipotezele sau, mai degrabă, printre toate convențiile pe care le putem face cu privire la acest subiect există una care e mai comodă decît celelalte.

Dar dacă s-a admis acest lucru fără dificultate cînd era vorba de legile astronomiei, de ce ne-am împotrivi cînd e vorba de mecanică?

Coordonatele corpurilor, am văzut, sînt determinate prin ecuații diferențiale de ordinul al doilea, și tot astfel în ceea ce privește diferențele acestor coordonate. Este vorba despre ceea ce am denumit principiul inerției generalizat și principiul mișcării relative. Dacă distanțele acestor corpuri ar fi determinate la fel prin ecuații de ordinul al doilea, se pare că intelectul ar trebui să fie pe deplin satisfăcut. În ce măsură încearcă intelectul această satisfacție și pentru ce nu se mulțumește cu ea?

Pentru a ne lămuri, este preferabil să luăm un exemplu simplu. Presupun un sistem analog cu sistemul nostru solar, dar din care nu se pot zări stele fixe străine de acest sistem, astfel încît

astronomii nu pot observa decît distanţele dintre planete şi soare, iar nu longitudinile absolute ale planetelor. Dacă noi deducem direct din legea lui Newton ecuaţiile diferenţiale care definesc variaţia acestor distanţe, aceste ecuaţii nu vor fi de ordinul al doilea. Vreau să spun că dacă, în afară de legea lui Newton, s-ar cunoaşte valorile iniţiale ale acestor distanţe şi ale derivatelor lor în raport cu timpul, aceasta nu ar fi suficient pentru a determina valorile acestor distanţe într-un moment ulterior. Ar lipsi încă o dată, şi această dată ar putea fi, de exemplu, ceea ce astronomii denumesc constanta ariilor.

Dar aici se poate să ne plasăm în două puncte de vedere diferite; putem să distingem două feluri de constante. În ochii fizicianului, lumea se reduce la o serie de fenomene depinzînd numai, pe de o parte, de stările lor iniţiale, şi pe de altă parte, de legile care leagă consecvenţii de antecedenţi. Dacă observaţia ne informează că o anumită cantitate este o constantă, noi vom avea posibilitatea alegerii între două moduri de a vedea.

Sau vom admite că există o lege care vrea ca această cantitate să nu poată varia, dar că datorită hazardului ea s-a găsit în situaţia de a avea, cîndva, la începuturi, cutare valoare mai degrabă decît cutare alta, valoare pe care ea a trebuit să o păstreze apoi. Această cantitate ar putea să se numească atunci o constantă *accidentală*.

Sau vom admite, din contră, că există o lege a naturii care impune acestei cantităţi o anumită valoare şi nu alta. Vom avea atunci ceea ce se poate numi o constantă *esenţială*.

De exemplu, în virtutea legilor lui Newton, durata de revoluţie a pămîntului trebuie să fie constantă. Dar dacă ea este egală cu 365 zile siderale şi ceva, iar nu cu 300 sau 400, aceasta se întîmplă ca urmare a nu ştiu cărui hazard iniţial. Este o constantă accidentală. Dacă, din

contră, exponentul distanței care figurează în expresia forței de atracție este egal cu —2, iar nu cu —3, aceasta nu e datorită hazardului, ci pentru că legea lui Newton o cere. Este o constantă esențială.

Nu știu dacă acest mod de a considera hazardul este legitim în sine și dacă această deosebire nu are ceva artificial; este sigur însă că, atît timp cît natura va avea secrete, distincția va fi, în aplicații, arbitrară și precară.

În ceea ce privește constanta ariilor, noi avem obiceiul să o privim ca accidentală. Este oare sigur că astronomii noștri imaginari ar proceda la fel? Dacă ei ar fi putut să compare două sisteme solare diferite, ar fi avut ideea că această constantă poate avea mai multe valori diferite; dar eu am presupus de la început că sistemul lor e izolat și că ei nu au cum să observe vreun astru străin în acest sistem. În aceste condiții, ei nu ar putea să remarce decît o constantă unică, cu o valoare unică, absolut invariabilă; ar fi determinați, fără nici o îndoială, să o considere ca o constantă esențială.

Cîteva cuvinte în treacăt pentru a preveni o obiecție: locuitorii acestei lumi fictive nu ar putea nici să observe, nici să definească constanta ariilor așa cum o facem noi, pentru că le scapă longitudinile absolute; acest fapt nu i-ar împiedica totuși să fie imediat determinați să remarce o anumită constantă care s-ar introduce în mod firesc în ecuațiile lor și care nu ar fi altceva decît ceea ce noi numim constanta ariilor.

Dar în acest caz iată ce se va întîmpla. Dacă constanta ariilor este considerată ca esențială, ca depinzînd de o lege a naturii, va fi suficient, pentru a calcula distanțele planetelor într-un moment oarecare, să cunoaștem valorile inițiale ale acestor distanțe și acelea ale derivatelor lor prime. Din acest punct de vedere nou, distanțele

vor fi guvernate de ecuații diferențiale de ordinul al doilea.

Cu aceasta ar fi însă complet satisfăcut intelectul acestor astronomi?

Nu cred; mai întîi, ei și-ar da repede seama că, diferențiind ecuațiile lor, astfel încît să le ridice ordinul, aceste ecuații devin mult mai simple. Și mai ales ei ar fi frapați de dificultatea care provine din simetrie. Ar trebui să admită legi diferite, după cum ansamblul planetelor ar prezenta figura unui anumit poliedru sau a poliedrului simetric, și nu s-ar depăși această consecință decît considerînd constanta ariilor ca accidentală.

Am luat un exemplu foarte particular pentru că am presupus niște astronomi care nu s-ar ocupa deloc de mecanica terestră și a căror vedere ar fi mărginită la sistemul solar. Dar concluziile noastre se aplică la toate cazurile. Universul nostru este mai extins decît al lor, pentru că noi avem stele fixe, însă și el este limitat, și atunci am putea raționa asupra ansamblului universului nostru la fel ca acești astronomi asupra sistemului lor solar.

Se vede astfel că, în ultima instanță, am fi determinați să conchidem că ecuațiile care definesc distanțele sînt de ordin superior ordinului al doilea. Pentru ce am fi revoltați de acest fapt, pentru ce găsim cu totul natural ca șirul fenomenelor să depindă de valorile inițiale ale derivatelor prime ale acestor distanțe, în timp ce ezităm să admitem că ele pot depinde de valorile inițiale ale derivatelor secunde? Acest lucru se poate întîmpla numai din cauza obișnuințelor intelectuale create în noi de studiul constant al principiului inerției generalizat și al consecințelor sale.

Valorile distanțelor într-un moment oarecare depind de valorile lor inițiale, de acelea ale deri-

vatelor lor prime și încă de altceva. Ce este acest *altceva?*

Dacă nu vrem să fie, simplu, una din derivatele secunde, nu avem decît alegerea ipotezelor. A presupune, cum se face de obicei, că acest altceva este orientarea absolută a universului în spațiu, sau rapiditatea cu care variază această orientare, aceasta poate fi, aceasta este în mod cert soluția cea mai comodă pentru geometru; nu este însă cea mai satisfăcătoare pentru filosof, pentru că această orientare nu există.

Se poate presupune că acest altceva este poziția sau viteza vreunui corp invizibil; este ceea ce chiar au făcut unii, care au denumit acest corp, corpul alfa, deși sîntem sortiți să nu știm niciodată nimic despre acest corp decît numele său. Este vorba aici de un artificiu cu totul analog aceluia despre care vorbeam la sfîrșitul paragrafului consacrat reflecțiilor mele asupra principiului inerției.

Dar, într-un cuvînt, dificultatea este artificială. Cu condiția ca indiciile viitoare ale instrumentelor noastre să nu poată depinde decît de indiciile pe care ni le-au dat sau pe care ele ar fi putut să le dea altădată; aceasta este tot ceea ce trebuie. Or, sub acest raport putem fi liniștiți.

Capitolul VIII

Energia și Termodinamica

Sistemul energetic. — Dificultățile ridicate de mecanica clasică i-au determinat pe anumiți cercetători să-i prefere un sistem nou, pe care îl denumesc *energetic.*

Sistemul energetic a luat naștere în urma descoperirii principiului conservării energiei. Helmholtz este cel ce i-a dat forma definitivă.

Se începe prin a se defini două cantități care joacă rolul fundamental în această teorie. Aceste două cantităţi sînt: *energia cinetică* sau forța vie și *energia potențială.*

Toate schimbările pe care le pot suferi corpurile din natură sînt guvernate de două legi experimentale:

1. Suma energiei cinetice și energiei potențiale este o constantă. Acesta este principiul conservării energiei.

2. Dacă un sistem de corpuri se află în situația A la momentul t_0 și în situația B la momentul t_1, el trece totdeauna din prima situație în cea de a doua astfel încît valoarea *medie* a diferenței dintre cele două feluri de energie, în intervalul de timp care separă cele două momente t_o și t_1, să fie cît mai mică cu putință.

Acesta este principiul lui Hamilton, care reprezintă una dintre formele principiului celei mai mici acțiuni.

Teoria energetică prezintă față de teoria clasică avantajele următoare:

1. Ea este mai puțin incompletă; adică principiile conservării energiei și al lui Hamilton ne informează mai mult decît principiile fundamentale ale teoriei clasice, excluzînd anumite mișcări pe care natura nu le realizează și care ar fi compatibile cu teoria clasică;

2. Ea ne dispensează de ipoteza atomilor, care e aproape imposibil de evitat cu teoria clasică.

Dar ea ridică, la rîndul ei, noi dificultăți:

Definițiile celor două feluri de energie sînt doar cu puțin mai ușoare decît acelea ale forței și ale masei din primul sistem. Totuși, ne putem descurca mai lesne aici, cel puțin în cazurile cele mai simple.

Să presupunem un sistem izolat format dintr-un anumit număr de puncte materiale; să pre-

supunem că aceste puncte sînt supuse unor forțe care nu depind decît de poziția lor relativă și de distanța dintre ele și care sînt independente de vitezele lor. În virtutea principiului conservării energiei, va trebui să avem aici o funcție de forțe.

În acest caz elementar, enunțul principiului conservării energiei este de o simplitate extremă. O anumită cantitate de energie, accesibilă experienței, trebuie să rămînă constantă. Această cantitate este suma a doi termeni; primul depinde numai de poziția punctelor materiale, fiind independent de vitezele lor; al doilea este proporțional cu pătratul vitezelor. Această descompunere nu se poate face decît într-un singur mod.

Primul dintre acești termeni, pe care îl voi denumi U, va fi energia potențială; al doilea, pe care îl voi denumi T, va fi energia cinetică.

Este adevărat că dacă $T + U$ este o constantă, la fel va fi și cu o funcție oarecare de $T + U$,

$$\varphi(T + U).$$

Dar această funcție $\varphi\ (T + U)$ nu va fi suma a doi termeni, unul independent de viteze, celălalt proporțional cu pătratul acestor viteze. Printre funcțiile care rămîn constante, nu există decît una care se bucură de această proprietate, anume $T + U$ (sau o funcție liniară de $T + U$, ceea ce nu e altceva, pentru că această funcție liniară poate fi oricînd redusă la $T + U$ printr-o schimbare de unitate și de origine). Avem atunci ceea ce vom denumi energie; primul termen îl vom denumi energia potențială, pe cel de-al doilea — energia cinetică. Definiția celor două feluri de energie poate fi dusă, așadar, pînă la capăt fără nici o ambiguitate.

La fel se întîmplă cu definiția maselor. Energia cinetică sau forța vie se exprimă foarte simplu cu ajutorul maselor și al vitezelor relative ale

tuturor punctelor materiale în raport cu unul dintre ele. Aceste viteze relative sînt accesibile observației și, cînd vom avea expresia energiei cinetice în funcție de aceste viteze relative, coeficienții acestei expresii ne vor da masele.

Astfel, în acest caz simplu, noțiunile fundamentale se pot defini fără dificultate. Dar dificultățile reapar în cazurile mai complicate și dacă forțele, de exemplu, în loc de a depinde numai de distanțe, depind și de viteze. Weber, de pildă, presupune că acțiunea dintre două molecule electrice depinde nu numai de distanța dintre ele, ci și de viteza și de accelerația lor. Dacă punctele materiale s-ar atrage după o lege analoagă, U ar depinde de viteză și ar putea să conțină un termen proporțional cu pătratul vitezei.

Cum să-i deosebim, printre termenii proporționali cu pătratele vitezelor, pe aceia care provin de la T sau de la U? Prin urmare, cum să distingem cele două părți ale energiei?

Mai mult, cum să definim energia însăși? Nu mai avem nici un motiv să luăm ca definiție mai degrabă pe $T + U$ decît oricare altă funcție de $T + U$, cînd a dispărut proprietatea care caracteriza pe $T + U$, aceea de a fi suma a doi termeni de o formă particulară.

Dar aceasta nu e totul, trebuie să se țină seamă nu numai de energia mecanică propriu-zisă, ci și de celelalte forme ale energiei: căldură, energie chimică, energie electrică etc. Principiul conservării energiei trebuie să se scrie:

$$T + U + Q = \text{const.},$$

unde T ar reprezenta energia cinetică sensibilă, U energia potențială de poziție, depinzînd numai de poziția corpurilor, Q energia internă moleculară, sub forma termică, chimică sau electrică.

Totul ar merge bine dacă acești trei termeni ar fi absolut distincți, dacă T ar fi proporțional cu pătratul vitezelor, U independent de aceste viteze și de starea corpurilor, Q independent de viteze și de pozițiile corpurilor și depinzînd numai de starea lor internă.

Expresia energiei nu ar putea să se descompună decît într-un singur mod în trei termeni de această formă.

Dar lucrurile nu stau astfel; să considerăm niște corpuri electrizate: energia electrostatică datorată acțiunii lor reciproce va depinde, evident, de sarcina lor, adică de starea lor; dar ea va depinde de asemenea de poziția lor. Dacă aceste corpuri sînt în mișcare, ele vor acționa unul asupra altuia electrodinamic, iar energia electrodinamică va depinde nu numai de starea și de poziția lor, ci și de vitezele lor.

Noi nu mai avem, așadar, nici un mijloc pentru a face trierea termenilor care trebuie să facă parte din T, din U și din Q și pentru a separa cele trei părți ale energiei.

Dacă $(T + U + Q)$ este constant, la fel va fi cu o funcție oarecare

$$\varphi(T + U + Q).$$

Dacă $T + U + Q$ ar fi de forma particulară pe care am considerat-o mai sus, nu ar rezulta de aici nici o ambiguitate; printre funcțiile $\varphi(T + U + Q)$ care rămîn constante, nu ar fi decît una de această formă particulară, și pe aceasta aș înțelege să o numesc energie.

Dar, am spus deja, lucrurile nu se întîmplă chiar în acest fel; printre funcțiile care rămîn constante, nu există unele care să poată lua în mod riguros această formă particulară; prin urmare, cum să alegi dintre ele pe aceea care trebuie să fie denumită energie? Noi nu mai dispunem de nimic care ne-ar putea călăuzi alegerea.

Nu ne mai rămîne decît un enunț pentru principiul conservării energiei; *există ceva care rămîne constant*. Sub această formă, nici el nu poate fi infirmat de experiență, reducîndu-se la un fel de tautologie. Este limpede că dacă lumea este guvernată de legi, vor fi cantități care vor rămîne constante. Ca și principiile lui Newton, și pentru o rațiune analoagă, principiul conservării energiei, fundat pe experiență, nu ar mai putea fi infirmat de aceasta.

Discuția de față arată că, trecîndu-se de la sistemul clasic la sistemul energetic, s-a realizat un progres; dar ea arată, în același timp, că acest progres este insuficient.

O altă obiecție mi se pare încă și mai gravă: principiul celei mai mici acțiuni este aplicabil fenomenelor reversibile; dar el nu este deloc satisfăcător în ceea ce privește fenomenele ireversibile; tentativa lui Helmholtz de a-l extinde la acest gen de fenomene nu a reușit și nici nu putea să reușească: sub acest raport, trebuie făcut cu totul altceva.

Însuși enunțul principiului celei mai mici acțiuni are ceva supărător pentru spirit. Pentru a se deplasa de la un punct la altul, o moleculă materială, sustrasă acțiunii oricărei forțe, dar constrînsă să se miște pe o suprafață, va urma linia geodezică, adică drumul cel mai scurt.

Această moleculă pare să cunoască punctul în care se intenționează a fi deplasată, să prevadă timpul care îi va fi necesar pentru a ajunge acolo urmînd un drum sau altul și să aleagă apoi drumul cel mai convenabil. Enunțul ne-o prezintă, pentru a spune astfel, ca pe o ființă însuflețită și liberă. Este limpede că ar fi preferabil să-l înlocuim cu un enunț mai puțin supărător și în care, cum ar spune filosofii, cauzele finale nu ar părea să se substituie cauzelor eficiente.

Termodinamica [4]. — Rolul celor două principii fundamentale ale termodinamicii în toate ramurile filosofiei naturale devine din zi în zi mai important. Abandonînd teoriile ambițioase de acum patruzeci de ani, tixite de ipoteze moleculare, noi căutăm astăzi să înălțăm doar pe Termodinamică întregul edificiu al fizicii matematice. Îi vor asigura cele două principii, al lui Meyer și al lui Clausius, o fundație destul de solidă pentru a dura un timp? Nimeni nu se îndoiește de aceasta; dar de unde ne vine o astfel de încredere?

Un eminent fizician îmi spunea într-o zi în legătură cu legea erorilor: toată lumea crede ferm în ea pentru că matematicienii își imaginează că este un fapt de observație, iar cei care observă că este o teoremă a matematicii. Mult timp așa au stat lucrurile și pentru principiul conservării energiei. Astăzi e altfel; nimeni nu ptrece este opinia că este un fapt experimental.

Dar atunci cine ne dă dreptul să atribuim principiului mai multă generalitate și mai multă precizie decît experiențelor care au slujit la a-l demonstra? Aceasta înseamnă a întreba dacă este legitim, așa cum se face de obicei, de a generaliza datele empirice, dar eu nu cutez să discut această chestiune, după ce atîția filosofi s-au străduit zadarnic să o rezolve. Un singur lucru este sigur: dacă această facultate ne-ar fi refuzată, știința nu ar putea să existe sau, cel puțin, redusă la un fel de inventar, la constatarea faptelor izolate, ea nu ar avea pentru noi nici un preț, pentru că ea nu ar putea să satisfacă nevoia noastră de ordine și de armonie și pentru că, în același timp, ea ar fi incapabilă de a prevedea. Cum circumstanțele care au precedat un fapt oarecare nu se vor reproduce niciodată toate în

---

[4] Rîndurile care urmează slnt reproducerea parțială a prefeței lucrării mele *Termodinamica.*

același timp, trebuie făcută deja o primă generalizare, pentru a prevedea dacă acest fapt va avea loc din nou de îndată ce va fi schimbată cea mai mică dintre aceste circumstanțe.

Dar orice propoziție poate fi generalizată într-o infinitate de moduri. Dintre toate generalizările posibile, trebuie neapărat să alegem, adică nu putem s-o alegem decît pe cea mai simplă. Sîntem deci determinați să acționăm ca și cum o lege simplă — toate lucrurile fiind egale de altfel — ar fi mai probabilă decît o lege complicată.

Acum o jumătate de secol se recunoștea fără șovăială și se proclama că naturii îi place simplitatea; ea ne-a adus de atunci încoace prea multe desmințiri. Astăzi nu se mai mărturisește această tendință și nu se mai păstrează din ea decît ceea ce este indispensabil pentru ca știința să nu devină imposibilă.

Formulînd o lege generală, simplă și precisă după experiențe relativ puțin numeroase și care ne conduc toate la același rezultat, noi nu am făcut, așadar, decît să ne supunem unei necesități căreia spiritul omenesc nu poate să i se sustragă.

Dar mai este ceva și pentru acest motiv insist.

Nimeni nu se îndoiește că principiul lui Meyer va dăinui tuturor legilor particulare din care a fost scos, la fel cum legea lui Newton a dăinuit legilor lui Kepler, din care ieșise, acestea rămînînd aproximative, dacă se ține seama de perturbații.

Pentru ce ocupă acest principiu un fel de loc privilegiat față de toate legile fizice? Există multe motive minore pentru a explica acest fapt.

Întîi și întîi se crede că n-am putea să-l respingem sau măcar să ne îndoim de rigoarea sa absolută fără a admite posibilitatea mișcării perpetue; noi ne ferim, bineînțeles, de o astfel de perspectivă și ne credem mai puțin temerari afirmînd decît negînd.

Poate că acest fapt nu este cu totul exact; imposibilitatea mișcării perpetue nu conduce la conservarea energiei decît pentru fenomenele reversibile.

Impunătoarea simplitate a principiului lui Meyer contribuie de asemenea la a ne întări încrederea. Într-o lege dedusă imediat din experiență, cum este aceea a lui Mariotte, această simplitate ne-ar apărea mai degrabă ca un motiv de neîncredere: dar aici lucrurile stau altfel; la prima vedere ne apar elemente disparate rînduindu-se într-o ordine neașteptată și formînd un tot armonios; dar nu putem crede că armonia ar fi un simplu efect al hazardului. Se pare că această cucerire a noastră ne este cu atît mai scumpă, cu cît ea ne-a costat mai multe eforturi sau că sîntem cu atît mai siguri că am smuls naturii adevărata sa taină, cu cît ea parcă ținea să o ascundă mai mult.

Dar acestea nu sînt decît motive minore; pentru a ridica legea lui Meyer la rangul de principiu absolut, ar trebui o discuție mai aprofundată. Însă dacă încercăm să o facem, se observă că acest principiu absolut nu este chiar ușor de enunțat.

În fiecare caz particular se vede bine ce este energia și i se poate da o definiție cel puțin provizorie; dar este imposibil să-i găsești o definiție generală.

Dacă vrem să enunțăm principiul în întreaga sa generalitate, aplicîndu-l la univers, îl vedem, pentru a spune astfel, cum dispare, putînd afirma doar că: *Există ceva care rămîne constant.*

Dar are aceasta vreun sens? În ipoteza deterministă, starea universului este determinată de un număr excesiv de mare de n parametri, pe care îi voi denumi $X_1, X_2, \ldots, X_n$. De îndată ce se cunosc, într-un moment oarecare, valorile acestor n parametri, se cunosc de asemenea derivatele lor în raport cu timpul și se pot calcula, ca

urmare, valorile acestor parametri într-un moment anterior sau ulterior. Cu alte cuvinte, acești n parametri satisfac n ecuații diferențiale de ordinul întîi.

Aceste ecuații admit $n - 1$ integrale și există, prin urmare, $n - 1$ funcții de $X_1, X_2, \ldots, X_n$, care rămîn constante. Atunci, dacă noi spunem că *există ceva care rămîne constant*, nu facem decît să enunțăm o tautologie. Ne-am afla în încurcătură dacă ar fi să spunem care este, dintre toate integralele noastre, aceea care trebuie să păstreze numele de energie.

Dealtminteri nu în acest sens se înțelege principiul lui Meyer cînd este aplicat unui sistem limitat.

Se admite atunci că p dintre n parametrii noștri variază independent, astfel încît avem numai $n-p$ relații, în general liniare, între acești n parametri și derivatele lor.

Să presupunem, pentru a simplifica enunțul, că suma acțiunii forțelor exterioare este nulă, ca și aceea a cantităților de căldură cedate în exterior. Iată atunci care va fi semnificația principiului nostru:

Există o combinație a acestor $n-p$ relații al cărei prim membru este o diferențială exactă; și atunci, această diferențială fiind nulă în virtutea celor $n-p$ relații ale noastre, integrala sa este o constantă, iar această integrală e denumită energie.

Dar cum este posibil să existe mai mulți parametri ale căror variații să fie independente? Aceasta nu poate avea loc decît sub influența forțelor exterioare (deși am presupus, pentru simplificare, că suma algebrică a acțiunilor acestor forțe este nulă). Într-adevăr, dacă sistemul ar fi complet sustras oricărei acțiuni exterioare, valorile n parametrilor noștri la un moment dat ar fi suficiente pentru a determina starea sistemului

la un moment ulterior oarecare, cu condiția să rămînem în ipoteza deterministă; am întîmpina deci aceeași dificultate ca mai sus.

Dacă starea viitoare a sistemului nu este în întregime determinată de starea sa actuală, aceasta se datorește faptului că ea depinde în plus de starea corpurilor exterioare sistemului. Dar atunci este oare verosimil să existe între parametrii x, care definesc starea sistemului, ecuații independente de starea corpurilor exterioare; și dacă, în anumite cazuri, noi credem că am putea găsi asemenea ecuații, aceasta nu se datorește oare numai ignoranței noastre și faptului că influența acestor corpuri este prea slabă pentru ca experiența noastră să o poată surprinde?

Dacă sistemul nu este considerat ca fiind complet izolat, este probabil că expresia riguros exactă a energiei sale interne va trebui să depindă de starea corpurilor exterioare. În plus, am presupus mai sus că suma acțiunilor exterioare era nulă, dar dacă vrem să scăpăm de această restricție puțin artificială, enunțul devine și mai dificil.

Pentru a formula principiul lui Meyer dîndu-i un sens absolut trebuie, așadar, să-l extindem la întregul univers și atunci ne vom afla în fața aceleiași dificultăți pe care căutam s-o evităm.

În rezumat, și pentru a folosi limbajul obișnuit, legea conservării energiei nu poate avea decît o semnificație, anume că există o proprietate comună în toate sensurile posibile; dar în ipoteza deterministă nu există decît unul singur posibil și atunci legea nu mai are sens.

În ipoteza indeterministă, dimpotrivă, aceasta capătă un sens chiar dacă am vrea să-l concepem într-un mod absolut; ea ar apărea ca o limită impusă libertății.

Dar acest termen de libertate mă avertizează că mă rătăcesc și că ies din domeniul matematicilor și al fizicii. Mă opresc, așadar, și nu vreau

să reţin din toată această discuţie decît o impresie, anume că legea lui Meyer este o formă destul de suplă pentru a se putea introduce în ea aproape tot ceea ce se doreşte. Nu vreau să spun prin aceasta că ea nu corespunde nici unei realităţi obiective, nici că ea se reduce la o simplă tautologie, pentru că, în fiecare caz particular, şi cu condiţia de a nu se dori să se meargă pînă la absolut, ea are un sens perfect clar.

Această suplеţe constituie un argument pentru a se crede în durata sa îndelungată, şi cum, pe de altă parte, ea nu va dispărea decît pentru a se topi într-o armonie superioară, noi putem să lucrăm cu încredere sprijinindu-ne pe ea, siguri dinainte că munca noastră nu va fi irosită.

Aproape tot ceea ce am spus pînă aici se aplică principiului lui Clausius. Ceea ce îl deosebeşte este faptul că el se exprimă printr-o inegalitate. Se va spune poate că la fel se întîmplă cu toate legile fizice, pentru că precizia lor este limitată totdeauna de erori de observaţie. Dar ele cel puţin nu au pretenţia de a fi decît prime aproximaţii, existînd speranţa de a fi înlocuite încetul cu încetul cu legi din ce în ce mai precise. Dacă, din contră, principiul lui Clausius se reduce la o inegalitate, cauza nu o constituie imperfecţiunea mijloacelor noastre de observaţie, ci natura însăşi a chestiunii.

Concluzii generale ale părţii a treia

Principiile mecanicii ni se prezintă deci sub două aspecte diferite. Pe de o parte, sînt adevăruri fundate pe experienţă şi verificate într-un mod foarte aproximativ pe sisteme aproape izolate. Pe de altă parte, sînt postulate aplicabile ansamblului universului şi considerate ca riguros adevărate.

Dacă aceste postulate posedă o generalitate și o certitudine care lipsesc adevărurilor experimentale din care ele sînt scoase, aceasta se datorește faptului că ele se reduc, în ultima analiză, la o simplă convenție, pe care avem dreptul să o facem pentru că sîntem siguri mai dinainte că nici o experiență nu va veni să o contrazică.

Această convenție nu este însă absolut arbitrară; ea nu ia naștere dintr-un capriciu al nostru; noi o adoptăm pentru că anumite experiențe ne-au arătat că ea ar fi comodă.

În felul acesta se explică cum a putut experiența să edifice principiile mecanicii și pentru ce ea nu va putea să le răstoarne.

Să facem comparație cu geometria. Propozițiile fundamentale ale geometriei, ca, de exemplu, postulatul lui Euclid, nu sînt nici ele decît convenții, și este tot atît de lipsit de rațiune să cercetezi dacă ele sînt adevărate sau false, pe cît este a te întreba dacă sistemul metric este adevărat sau fals.

Iar aceste convenții sînt comode, lucru pe care îl constatăm din unele experiențe.

La prima vedere, analogia este completă; rolul experienței pare același. Am fi tentați, așadar, să spunem: sau, într-adevăr, mecanica trebuie să fie privită ca o știință experimentală, și atunci la fel trebuie să fie și cu geometria; sau, din contră, geometria este o știință deductivă, și atunci se poate spune același lucru și despre mecanică.

O asemenea concluzie nu ar fi însă legitimă. Experiențele care ne-au condus la adoptarea ca mai comode a convențiilor fundamentale ale geometriei se ocupă cu obiecte care nu au nimic comun cu acelea pe care le studiază geometria; ele se ocupă cu proprietățile corpurilor solide, cu propagarea rectilinie a luminii. Sînt experiențe de mecanică, experiențe de optică; nu există nici un temei să le privim ca experiențe de geometrie.

Principala raţiune pentru care geometria noastră ni se pare comodă constă în faptul că diferitele părţi ale corpului nostru — ochii, membrele — se bucură tocmai de proprietăţile corpurilor solide. Judecînd astfel, experienţele noastre fundamentale sînt, mai înainte de orice, experienţe de fiziologie, care se ocupă nu cu spaţiul, care este obiectul studiat de către geometru, ci cu corpul său, adică cu instrumentul de care trebuie să se servească geometrul pentru acest studiu.

Însă convenţiile fundamentale ale mecanicii şi experienţele care ne demonstrează că ele sînt comode se ocupă cu aceleaşi obiecte sau cu obiecte analoage. Principiile convenţionale şi generale sînt generalizarea naturală şi directă a principiilor experimentale şi particulare.

Nu trebuie să se înţeleagă de aici că eu trasez astfel frontiere artificiale între ştiinţe; că dacă separ printr-o barieră geometria propriu-zisă de studiul corpurilor solide, aş putea tot atît de bine să ridic una între mecanica experimentală şi mecanica convenţională a principiilor generale. Cine nu vede, într-adevăr, că, separînd aceste două ştiinţe, le mutilez pe amîndouă şi că ceea ce va rămîne din mecanica convenţională, cînd ea va fi separată, nu va fi decît tare puţin lucru, ce nu va putea fi nicidecum comparat cu acel superb corp de doctrină pe care îl numim geometrie?

Se înţelege acum pentru ce învăţămîntul mecanicii trebuie să rămînă experimental.

Numai astfel va putea el să ne facă să pricepem geneza ştiinţei, acest lucru fiind indispensabil pentru înţelegerea completă a ştiinţei însăşi.

Dealtminteri, dacă se studiază mecanica, acest lucru se face pentru a o aplica; şi ea nu poate fi aplicată decît dacă rămîne obiectivă. Or, aşa după cum am văzut, ceea ce principiile cîştigă în generalitate şi în certitudine, pierd în obiectivitate. Aşadar, mai ales cu latura obiectivă

a principiilor este indicat a te familiariza de timpuriu; nu poți să faci acest lucru decît mergînd de la particular la general, în loc de a urma drumul invers.

Principiile sînt convenții și definiții deghizate. Ele sînt scoase totuși din legi experimentale; aceste legi sînt, pentru a spune astfel, ridicate la rangul de principii, cărora spiritul nostru le atribuie o valoare absolută.

Unii filosofi au generalizat prea mult; ei au crezut că principiile constituie întreaga știință și, prin urmare, că întreaga știință e convențională.

Această doctrină paradoxală, care a fost denumită nominalism, nu rezistă analizei.

Cum poate o lege să devină principiu? Ea exprimă un raport între doi termeni reali *A* și *B*. Dar ea nu e riguros adevărată, ci aproximativă. Introducem în mod arbitrar un termen intermediar *C* mai mult sau mai puțin fictiv și *C* este, *prin definiție*, cel ce are împreună cu *A* *exact* relația exprimată de lege.

În felul acesta legea noastră se descompune într-un principiu absolut și riguros, care exprimă raportul lui *A* cu *C*, și o lege experimentală aproximativă și revizuibilă care exprimă raportul lui *C* cu *B*. Este limpede că oricît de departe ar fi împinsă această descompunere, vor rămîne totdeauna legi.

Vom intra acum în domeniul legilor propriu-zise.

Partea a patra

Natura

Capitolul IX

Ipotezele în fizică

Rolul experienței și al generalizării. — Experiența este unica sursă a adevărului: ea singură poate să ne facă să cunoaștem ceva nou; ea singură poate să ne dea certitudinea. Iată două lucruri pe care nimeni nu le poate contesta.

Dar atunci, dacă experiența este totul, ce loc rămîne pentru fizica matematică? Ce nevoie are fizica experimentală de un asemenea auxiliar, care pare inutil și poate chiar primejdios?

Și totuși fizica matematică există; ea a adus servicii de netăgăduit; este vorba aici de un fapt pe care este necesar să-l explicăm.

Anume că nu este suficient să observi, trebuie să te servești de observațiile făcute, și pentru aceasta trebuie să generalizezi. Ceea ce s-a făcut din toate timpurile; numai că, dat fiind că amintirea erorilor trecute l-a făcut pe om din ce în ce mai circumspect, s-a observat din ce în ce mai mult și s-a generalizat din ce în ce mai puțin.

Fiecare secol lua în derîdere pe precedentul, acuzîndu-l de a fi generalizat prea repede și prea naiv. Lui Descartes îi era milă de Ionieni; Descartes, la rîndul său, ne face să surîdem; fără nici o îndoială, copiii noștri vor rîde de noi într-o zi.

Dar atunci n-am putea oare să ajungem dintr-o dată la capăt? Nu-i acesta mijlocul de a scăpa

de orice luare în rîs previzibilă? Nu putem să ne mulțumim oare cu experiența pură și simplă?

Nu, acest lucru este imposibil; ar însemna să nesocotim complet adevăratul caracter al științei. Savantul trebuie să ordoneze; știința se face cu fapte, așa cum o casă se construiește cu cărămizi; dar o acumulare de fapte nu înseamnă o știință mai mult decît o grămadă de cărămizi o casă.

Mai înainte de toate, savantul trebuie să prevadă. Undeva, Carlyle a scris următoarele: „Faptul singur este important; Ioan fără de Țară a trecut pe aici, iată ceea ce este admirabil, iată o realitate pentru care aș da toate teoriile din lume". Carlyle era un compatriot al lui Bacon; dar Bacon nu ar fi spus acestea. La primul găsim limbajul istoricului. Fizicianul ar zice mai degrabă: „Ioan fără de Țară a trecut pe aici; puțin îmi pasă, pentru că el nu va mai trece pe aici".

Știm cu toții că există experiențe bune și experiențe proaste. Acestea din urmă se vor acumula în zadar; de faci o sută, de faci o mie, o singură lucrare a unui adevărat maestru, a unui Pasteur de exemplu, va fi suficientă pentru a le face să se prăvălească în uitare. Bacon va fi înțeles bine aceasta, el este cel care a creat termenul *experimentum crucis*. Dar Carlyle nu era obligat să-l înțeleagă. Un fapt este un fapt; un școlar citește o cifră pe un termometrul fără să-și propună ceva cu aceasta; el a citit pur și simplu o cifră și dacă doar faptul este acela care contează, avem aici o realitate de același grad ca și peregrinările regelui Ioan fără de Țară. Pentru ce faptul că școlarul a făcut această citire nu prezintă nici un interes, în timp ce faptul că un fizician abil ar face o altfel de citire ar fi, din contră, foarte important? Deoarece din prima citire nu se poate conchide nimic. Ce este deci o experiență bună? Este experiența care ne face

să cunoaştem altceva decît un fapt izolat; este aceea care ne permite să prevedem, adică aceea care ne permite să generalizăm.

Căci, fără generalizare, previziunea este imposibilă. Circumstanţele în care s-a operat nu se vor reproduce niciodată toate în acelaşi timp. Faptul observat nu se va repeta deci niciodată; singurul lucru ce se poate afirma este că, în circumstanţe analoage, se va produce un fapt analog. Pentru a prevedea trebuie, deci, cel puţin să apelăm la analogie, adică să generalizăm deja.

Oricît de temători am fi, trebuie să interpolăm; experienţa nu ne dă decît un anumit număr de puncte izolate, pe care noi trebuie să le reunim printr-o linie continuă; aceasta este o veritabilă generalizare. Dar se face mai mult, curba pe care o trasăm trece printre punctele observate şi aproape de aceste puncte, iar nu prin chiar aceste puncte. În felul acesta nu ne mărginim la a generaliza experienţa, ci o corectăm; dar fizicianul care s-ar abţine de la aceste corecţii şi s-ar mulţumi cu experienţa pură şi simplă ar fi forţat să enunţe legi tare bizare.

Faptele ca atare nu sînt, deci, suficiente; de aceea e nevoie de ştiinţa ordonată sau mai degrabă organizată.

Se spune adeseori că trebuie să se experimenteze fără o idee preconcepută. Aceasta nu este cu putinţă; nu numai că ar însemna să faci sterilă orice experienţă, dar chiar dacă ai vrea aşa ceva nu ai putea s-o faci. Fiecare poartă în sine o concepţie despre lume la care nu poate renunţa uşor. Trebuie neapărat, de exemplu, să ne servim de limbaj, iar limbajul nostru este plămădit din idei preconcepute, nu din altceva. Numai că acestea sînt idei preconcepute inconştiente, de o mie de ori mai periculoase decît celelalte.

Trebuie să credem oare că dacă introducem aici alte idei, de care sîntem pe deplin conştienţi,

lucrurile vor fi și mai grave? Eu nu cred așa ceva! Socotesc mai degrabă că ele se vor sluji în mod reciproc de contrapondere, cra să spun de antidot; în general, se vor înțelege rău între ele; vor intra în conflict unele cu altele și, datorită acestui fapt, ele ne vor forța să considerăm lucrurile sub diferite aspecte. Pentru a ne elibera e suficient să știm că nu mai ești sclav cînd poți să-ți alegi stăpînul.

Astfel, datorită generalizării, fiecare fapt observat ne face să prevedem un mare număr de alte fapte; numai că nu trebuie să uităm că doar primul este sigur, că toate celelalte nu sînt decît probabile. Oricît de trainic fundamentată ni s-ar putea părea o previziune, noi nu sîntem niciodată siguri *în mod absolut* că experiența nu o va dezminți, dacă ne hotărîm să o verificăm. Dar probabilitatea este adeseori destul de mare pentru ca, practic, să ne putem mulțumi cu ea. Este totuși preferabil să prevezi fără certitudine decît să nu prevezi deloc.

Așadar, nu trebuie niciodată să se dispretuiască efectuarea unei verificări atunci cînd se ivește prilejul. Dar orice experiență este lungă și dificilă și cei care lucrează în acest domeniu sînt puțin numeroși; iar numărul faptelor pe care avem nevoie să le prevedem este imens; față de acestea, numărul verificărilor directe pe care putem să le facem nu e niciodată decît o cantitate neglijabilă.

Din acest puțin cu care putem veni direct în contact trebuie să tragem cel mai mare folos; trebuie ca fiecare experiență să ne permită cel mai mare număr posibil de previziuni și cu cel mai înalt grad de probabilitate posibil. Problema este, ca să spunem așa, de a mări randamentul mașinii științifice.

Să mi se permită să compar Știința cu o bibliotecă ce trebuie să se îmbogățească fără încetare; bibliotecarul ar dispune pentru achiziții de

un credit insuficient și atunci el trebuie să se străduiască să nu-l risipească.

Fizica experimentală este cea care are sarcina cumpărăturilor; ea singură poate, așadar, să îmbogățească biblioteca.

În ceea ce privește fizica matematică, ea ar avea ca misiune elaborarea catalogului. Dacă acest catalog este bine întocmit, biblioteca nu va fi prin aceasta mai bogată. Dar el va putea să-l ajute pe cititor să se folosească de aceste bogății.

Mai mult, catalogul îi arată bibliotecarului lacunele colecțiilor sale, îi permite acestuia să-și utilizeze creditele în mod judicios; ceea ce este cu atît mai important, cu cît aceste credite sînt mai mici.

Acesta este deci rolul fizicii matematice; ea trebuie să călăuzească generalizarea astfel, încît să mărească ceea ce numeam adineaori randamentul științei. Prin ce mijloace atinge ea acest țel și cum poate ea să procedeze mai sigur constituie ceea ce ne rămîne să examinăm.

Unitatea naturii. — Să observăm mai întîi că orice generalizare presupune într-o anumită măsură credința în unitatea și simplitatea naturii. În ceea ce privește unitatea, aici nu poate exista vreo dificultate. Dacă diversele părți ale universului nu ar fi ca organele unui aceluiași corp, ele nu ar acționa unele asupra altora, ci s-ar ignora reciproc; iar noi nu am cunoaște decît una singură dintre aceste părți. Așadar, nu trebuie să ne întrebăm dacă natura este una, ci cum este ea una.

În ceea ce privește cel de-al doilea punct, lucrurile sînt ceva mai complicate. Nu este sigur că natura este simplă. Am putea noi oare să procedăm fără nici un risc ca și cum ea ar fi simplă?

A fost un timp în care simplitatea legii lui Mariotte era un argument invocat în favoarea

exactității sale; în care Fresnel însuși, după ce a spus, într-o conversație avută cu Laplace, că naturii puțin îi pasă de dificultățile analitice, se credea obligat să dea explicații pentru a nu contraria prea mult opinia dominantă.

Astăzi ideile s-au schimbat mult; și totuși cei care nu cred că legile naturii trebuie să fie simple sînt obligați adeseori să acționeze ca și cum ar crede aceasta. Ei nu s-ar putea sustrage cu totul acestei necesități fără a face imposibilă orice generalizare și, prin urmare, orice știință.

Este limpede că un fapt oarecare poate fi generalizat într-o infinitate de moduri, așa încît e vorba de a alege; alegerea nu poate fi călăuzită decît de considerentul simplității. Să luăm cazul cel mai banal, acela al interpolării. Ducem o linie continuă, cît mai regulată posibil, între punctele date de observație. Pentru ce evităm punctele care prezintă unghiuri, inflexiunile prea bruște? Pentru ce nu lăsăm curba noastră să descrie zigzagurile cele mai capricioase? Pentru că noi știm dinainte sau pentru că noi credem că știm că legea de exprimat nu poate fi atît de complicată.

Masa planetei Jupiter se poate deduce fie din mișcările sateliților săi, fie din perturbațiile marilor planete, fie din acelea ale micilor planete. Dacă se ia media determinărilor obținute prin aceste trei metode, se găsesc trei numere foarte apropiate, dar diferite. Acest rezultat s-ar putea interpreta presupunînd că, în cele trei cazuri, coeficientul gravitației nu este același; observațiile ar fi cu siguranță mult mai bine reprezentate. Pentru ce respingem noi această interpretare? Nu pentru că este absurdă, ci pentru că este complicată în mod inutil. Nu o vom accepta decît în ziua în care ea se va impune, dar ea nu se impune încă.

În rezumat, de cele mai multe ori, orice lege este socotită ca simplă pînă la proba contrarie.

Această obișnuință le-a fost impusă fizicienilor de rațiunile pe care le-am explicat mai sus; dar cum să o justifici în prezența descoperirilor care ne oferă în fiecare zi noi amănunte mai bogate și mai complexe? Cum să o împaci cu sentimentul unității naturii? Căci dacă totul depinde de tot, raporturile în care intervin atîtea obiecte diverse nu mai pot fi simple.

Dacă studiem istoria științei, vedem cum iau naștere două fenomene — pentru a le spune astfel — inverse: cînd simplitatea este cea care se ascunde sub aparențe complexe, cînd, dimpotrivă, simplitatea este cea aparentă, disimulînd realități extrem de complicate.

Ce poate fi mai complicat decît mișcările perturbate ale planetelor, ce poate fi mai simplu decît legea lui Newton? Aici, natura, triumfînd, cum spunea Fresnel, asupra dificultăților analitice, nu întrebuințează decît mijloace simple și generează, prin combinarea lor, nu știu ce iță de nedescurcat. Aici se află simplitatea ascunsă, cea care trebuie descoperită.

Exemplele privind contrariul abundă. În teoria cinetică a gazelor se au în vedere molecule animate de viteze mari, ale căror traiectorii, deformate de ciocniri neîncetate, iau formele cele mai capricioase, brăzdînd spațiul în toate sensurile. Rezultatul observabil este legea simplă a lui Mariotte; fiecare fapt individual e complicat; legea numerelor mari restabilește simplitatea în medie. Aici simplitatea este aparentă, numai caracterul grosier al simțurilor noastre împiedicîndu-ne să observăm complexitatea.

Multe fenomene se supun unei legi a proporționalității; dar de ce? Pentru că în aceste fenomene există ceva care este foarte mic. Legea simplă observată nu este astfel decît o traducere a regulii analitice generale după care creșterea infinit mică a unei funcții este proporțională cu creșterea variabilei. Cum, în realitate, creșterile

nu sînt infinit mici, ci foarte mici, legea proporționalității nu este decît aproximativă și simplitatea nu este decît aparentă. Ceea ce am spus mai sus se aplică regulii suprapunerii micilor mișcări, a cărei folosire este atît de fecundă și care constituie fundamentul opticii.

Dar în ceea ce privește legea lui Newton? Simplitatea sa, atît de multă vreme ascunsă, poate că nu este decît aparentă. Cine știe dacă ea nu este datorată vreunui mecanism complicat, șocului vreunei materii subtile animată de mișcări neregulate, și dacă ea nu a devenit simplă decît prin jocul mediilor și al numerelor mari? În orice caz, este greu să nu presupui că legea veritabilă conține termeni complementari, care ar deveni sensibili la distanțe mici. Dacă în astronomie ei sînt neglijabili în raport cu legea lui Newton și dacă legea își află astfel simplitatea, aceasta ar fi numai din cauza enormității distanțelor cerești.

Fără îndoială, dacă mijloacele noastre de investigație ar deveni din ce în ce mai pătrunzătoare, noi am descoperi simplul sub complex, apoi complexul sub simplu, apoi din nou simplul sub complex și așa mai departe, fără ca să putem prevedea care va fi ultimul termen.

Trebuie neapărat să te oprești undeva, iar pentru ca știința să fie posibilă trebuie să te oprești atunci cînd a fost găsită simplitatea. Acesta este singurul teren pe care vom putea să înălțăm edificiul generalizărilor noastre. Dar, această simplitate fiind aparentă, un astfel de teren va fi el destul de solid? E o problemă ce se cuvine să o cercetăm.

În acest scop, să vedem ce rol joacă în generalizările noastre credința în simplitate. Noi am verificat o lege simplă într-un număr destul de mare de cazuri particulare; refuzăm să admitem că acest fapt, repetat atît de frecvent, este un simplu efect al hazardului și conchidem

de aici că legea trebuie să fie adevărată în cazul general.

Kepler remarcă faptul că pozițiile unei planete observate de Tycho se află toate pe o aceeași elipsă. Nu i-a trecut nici un moment prin gînd că, printr-un joc ciudat al hazardului, Tycho nu a privit niciodată cerul decît în momentul în care traiectoria veritabilă a planetei tocmai întretăia această elipsă.

Ce interesează atunci — că simplitatea este reală sau că ea acoperă un adevăr complex? Că ea este datorată influenței numerelor mari, care nivelează diferențele individuale, că ea este datorată mărimii sau micimii anumitor cantități care permit să se neglijeze anumiți termeni, în toate cazurile ea nu se datorește hazardului. Această simplitate, reală sau aparentă, are întotdeauna o cauză. Noi vom putea deci să facem totdeauna același raționament, iar dacă o lege simplă a fost observată în mai multe cazuri particulare, vom putea presupune în mod legitim că ea va fi adevărată și în cazurile analoage. A nu se accepta aceasta ar însemna să se atribuie hazardului un rol inadmisibil.

Există totuși o diferență. Dacă simplitatea ar fi reală și profundă, ea ar rezista preciziei crescînde a mijloacelor noastre de măsură; dacă, deci, noi credem natura profund simplă, ar trebui să conchidem de la o simplitate aproximativă la o simplitate riguroasă. Ceea ce se făcea altădată, dar ceea ce noi nu mai avem dreptul să facem.

Simplitatea legilor lui Kepler, de exemplu, nu este decît aparentă. Aceasta nu împiedică faptul ca aceste legi să se aplice aproape la toate sistemele analoage sistemului solar, dar împiedică faptul de a fi riguros exacte.

Rolul ipotezei. — Orice generalizare este o ipoteză; ipoteza are deci un rol necesar, pe care nimeni nu l-a contestat vreodată. Numai că ea trebuie să fie totdeauna, cît mai curînd și frecvent posibil,

supusă verificării. Este de la sine înțeles că dacă ea nu rezistă la probe, trebuie abandonată fără vreun gînd ascuns. Ceea ce se și face, în general, dar, cîteodată, cu o anumită părere de rău.

Ei bine, această părere de rău nu este justificată; fizicianul care renunță la una dintre ipotezele sale ar trebui, din contră, să fie bucuros, întrucît a găsit un prilej nesperat de a face descoperiri. Ipoteza sa, îmi imaginez, nu fusese adoptată în mod superficial; ea ținea seamă de toți factorii cunoscuți care păreau să poată interveni în fenomen. Dacă ipoteza nu s-a confirmat, aceasta se datorește faptului că aici există ceva neașteptat, ceva neobișnuit; că aici se va găsi ceva necunoscut și nou.

Ipoteza, astfel infirmată, a fost ea, așadar, sterilă? Dimpotrivă, se poate spune că ea a adus mai multe servicii decît o ipoteză adevărată; nu numai că ea a oferit prilejul unei experiențe decisive, dar dacă s-ar fi făcut această experiență din întîmplare, fără vreo ipoteză, nu s-ar fi obținut nimic din ea; nu s-ar fi văzut aici nimic extraordinar; nu s-ar fi înregistrat decît un fapt în plus, fără a se deduce din el nici cea mai mică consecință.

Dar în ce condiții folosirea ipotezei nu este periculoasă?

Hotărîrea fermă de a o supune experienței nu este suficientă; există și ipoteze periculoase, mai cu seamă cele neexprimate, inconștiente. Pentru că le facem fără să știm, nici nu putem să le abandonăm. Aici fizica matematică ne poate aduce încă un serviciu. Prin precizia care îi este proprie, aceasta ne obligă să formulăm toate ipotezele pe care le-am face fără ea, dar fără să ne dăm seama.

Să remarcăm, pe de altă parte, că este important să nu înmulțim ipotezele peste măsură și să nu le facem decît una după alta. Dacă noi construim o teorie bazată pe ipoteze multiple și dacă experiența o infirmă, atunci care este,

dintre premisele noastre, aceea pe care e necesar s-o schimbăm? Va fi imposibil să știm acest lucru. Și invers, dacă experiența reușește, atunci vom putea crede că au fost verificate toate ipotezele deodată? Sau vom crede că au fost determinate mai multe necunoscute doar cu o singură ecuație?

Trebuie de asemenea avut grija de a distinge între diferitele feluri de ipoteze. Există mai întîi ipoteze cu totul naturale, cărora nu ne putem sustrage deloc. Este greu să nu presupui că influența corpurilor foarte îndepărtate este cu totul neglijabilă, că micile mișcări se supun unei legi liniare, că efectul este o funcție continuă de cauza sa. La fel voi spune despre condițiile impuse de simetrie. Toate aceste ipoteze formează, pentru a spune astfel, fondul comun al tuturor teoriilor fizicii matematice. Ele sînt ultimele pe care trebuie să le abandonăm.

Există o a doua categorie de ipoteze, pe care le voi califica drept indiferente. De cele mai multe ori, analistul presupune, la începutul demersului său, fie că materia este continuă, fie, invers, că ea este alcătuită din atomi. Dar chiar dacă ar fi procedat dimpotrivă, rezultatele sale nu ar fi fost altele; ar fi întîmpinat doar mai multe dificultăți pentru a le obține, atîta tot. Atunci, dacă experiența confirmă concluziile sale, va gîndi el că a demonstrat, de exemplu, existența reală a atomilor?

În teoriile optice se introduc doi vectori care sînt priviți, unul ca o viteză, celălalt ca un vîrtej. Și aici este tot o ipoteză indiferentă, pentru că s-ar fi ajuns la aceleași concluzii procedînd tocmai contrariu; succesul experienței nu poate deci dovedi că primul vector este, într-adevăr, o viteză; el nu dovedește decît faptul că este un vector; aici se află singura ipoteză care a fost realmente introdusă în premise. Pentru a-i da aparența concretă pe care o cere slăbiciunea inte-

lectului nostru, a trebuit, într-adevăr, să-l considerăm fie ca o viteză, fie ca un vîrtej; la fel cum a trebuit să-l reprezentăm printr-o literă, fie prin x, fie prin y; dar rezultatul, oricare ar fi el, nu va dovedi că am avut dreptate sau că am greșit considerîndu-l ca o viteză; după cum nici nu va dovedi că am avut dreptate sau că am greșit denumindu-l x și nu y.

Aceste ipoteze indiferente nu sînt niciodată periculoase, cu condiția de a nu le nesocoti caracterul. Ele pot fi utile fie ca artificii de calcul, fie pentru a susține puterea noastră de înțelegere prin imagini concrete, pentru a fixa ideile, cum se spune. Nu există, așadar, motive pentru a le proscrie.

Ipotezele din cea de-a treia categorie sînt veritabilele generalizări. Ele sînt acelea pe care experiența trebuie să le confirme sau să le infirme. Verificate sau respinse, ele pot fi fecunde. Dar, pentru rațiunile pe care le-am expus, ele nu vor fi fecunde decît dacă nu le înmulțim.

Originea fizicii matematice. — Să pătrundem mai adînc și să studiem mai de aproape condițiile care au permis dezvoltarea fizicii matematice. Recunoaștem imediat că eforturile savanților au tins totdeauna spre a descompune fenomenul complex dat direct prin experiență într-un număr foarte mare de fenomene elementare.

Și aceasta în trei moduri diferite. Mai întîi în timp. În loc de a cuprinde în ansamblul său dezvoltarea progresivă a unui fenomen, se caută în mod simplu să se lege fiecare moment de momentul imediat anterior; se admite că starea actuală a lumii nu depinde decît de trecutul cel mai apropiat, fără a fi direct influențată, pentru a spune astfel, de amintirea unui trecut îndepărtat. Grație acestui postulat, în loc de a studia direct întreaga succesiune a fenomenelor, ne putem limita la a-i scrie „ecuația diferențială"; legilor lui Kepler li se substituie legea lui Newton.

Apoi, se caută a se descompune fenomenul în spațiu. Ceea ce ne dă experiența este un ansamblu confuz de fapte care se produc pe o scenă de o anumită întindere; trebuie să ne străduim să discernem fenomenul elementar, care va fi, din contră, localizat într-o regiune foarte mică a spațiului.

Cîteva exemple vor face poate să se înțeleagă mai bine ideile mele. Dacă am vrea să studiem în întreaga sa complexitate distribuirea temperaturii într-un solid care se răcește, nu am putea niciodată să ajungem la vreun rezultat. Totul devine simplu dacă reflectăm la faptul că un punct al solidului nu poate să cedeze în mod direct căldură unui punct îndepărtat; el nu va ceda căldură imediat decît punctele învecinate și, din aproape în aproape, fluxul de căldură va putea atinge alte părți ale solidului. Fenomenul elementar îl constituie schimbul de căldură dintre două puncte contigui; fenomenul este strict localizat și este relativ simplu, dacă se admite, cum este și natural, că el nu este influențat de temperatura moleculelor a căror distanță este mare.

Îndoi o vargă de metal; ea va lua o formă foarte complicată, al cărei studiu direct e imposibil; dar va fi posibil dacă observ că flexiunea sa nu este decît rezultanta deformării elementelor foarte mici ale verigii și că deformarea fiecăruia dintre aceste elemente nu depinde decît de forțele care îi sînt direct aplicate și nicidecum de acelea care pot acționa asupra celorlalte elemente.

În toate aceste exemple, pe care le-aș putea înmulți fără dificultate, se admite că nu există acțiune la distanță sau cel puțin la mare distanță. Aceasta este o ipoteză; ea nu e totdeauna adevărată, ne-o dovedește legea gravitației; trebuie deci să o supunem verificării; dacă este confirmată, chiar aproximativ, ea e prețioasă, căci ne va permite să facem fizică matematică cel puțin prin aproximații succesive.

Dacă ea nu e confirmată, trebuie să căutăm altceva analog, căci există și alte mijloace de a ajunge la fenomenul elementar. Dacă mai multe corpuri acționează simultan, se poate întîmpla ca acțiunile lor să fie independente și să se adauge simplu unele altora, fie în modul vectorilor, fie în cel al cantităților scalare. Fenomenul elementar este atunci acțiunea unui corp izolat. Sau putem avea de-a face cu mici mișcări ori, mai general, cu mici variații, care se supun binecunoscutei legi a suprapunerii. Mișcarea observată va fi atunci descompusă în mișcări simple, de exemplu sunetul în armonicele sale, lumina albă în componentele sale monocromatice.

Cînd s-a stabilit în ce direcție este preferabil să se caute fenomenul elementar, prin ce mijloace îl putem aborda?

Mai întîi, pentru a-l prezice sau, mai curînd, pentru a prezice ceea ce ne este util, se va putea întîmpla să nu fie necesar să-i pătrundem mecanismul; legea numerelor mari va fi suficientă. Să reluăm exemplul propagării căldurii; fiecare moleculă radiază spre fiecare moleculă vecină; după care lege, nu avem nevoie să o știm; dacă am presupune ceva în această privință, ar fi o ipoteză indiferentă și, prin urmare, inutilă și neverificabilă. Și, într-adevăr, prin acțiunea mediatorilor și datorită simetriei mediului, toate diferențele se nivelează și, oricare ar fi ipoteza făcută, rezultatul este întotdeauna același.

La fel se întîmplă în teoria elasticității, în aceea a capilarității; moleculele vecine se atrag și se resping; nu avem nevoie să știm după care lege; ne este suficient să știm că această atracție nu are loc decît la mici distanțe, că moleculele sînt foarte numeroase, că mediul este simetric și nu va mai trebui decît să lăsăm să acționeze legea numerelor mari.

Aici, din nou simplitatea fenomenului elementar e ascunsă sub complicația fenomenului

rezultant observabil; dar, la rîndul său, această simplitate nu e decît aparentă și disimulează un mecanism foarte complex.

Cel mai bun mijloc pentru a ajunge la fenomenul elementar este, evident, experiența. Ar trebui, prin artificii experimentale, să se disocieze corpul complex pe care natura îl oferă cercetării noastre și să i se studieze cu grijă elementele cît mai purificate posibil; de exemplu, lumina albă naturală se va descompune în radiații monocromatice cu ajutorul prismei și în radiații polarizate cu ajutorul polarizorului.

Din nefericire, acest lucru nu este nici totdeauna posibil, nici totdeauna suficient și trebuie cîteodată ca raţiunea să devanseze experiența. Nu voi cita în acest sens decît un exemplu, care m-a impresionat totdeauna profund.

Dacă descompun lumina albă, pot izola o mică porțiune din spectru, dar, oricît de mică ar fi ea, va păstra o anumită lățime. La fel, radiațiile naturale zise *monocromatice* ne dau o linie foarte fină, care nu este totuși infinit de fină. S-ar putea presupune că, studiind experimental proprietățile acestor radiații naturale, operînd cu linii spectrale din ce în ce mai fine și trecînd la limită, se va ajunge să se cunoască proprietățile unei radiații riguros monocromatice.

Acest lucru nu este exact. Presupun că două raze emană de la o aceeași sursă, că sînt polarizate mai întîi în două planuri rectangulare, că sînt aduse apoi în același plan de polarizare și că se urmărește realizarea interferării lor. Dacă lumina ar fi *riguros* monocromatică, ele ar interfera; dar, întrucît radiațiile noastre sînt aproape monocromatice, nu va avea loc interferența, și aceasta oricît de îngustă ar fi linia; ar trebui, pentru a se întîmpla altfel, ca ea să fie de mai multe milioane de ori mai îngustă decît cele mai fine linii cunoscute.

Aici, deci, trecerea la limită ne-ar fi înșelat; a trebuit ca intelectul să devanseze experiența și, dacă a făcut-o cu succes, este datorită faptului că s-a lăsat călăuzit de instinctul simplității.

Cunoașterea faptului elementar ne permite să punem problema în ecuație; nu mai rămîne decît să deducem prin combinație faptul complex observabil și verificabil. Este ceea ce se numește *integrarea;* aceasta este treaba matematicianului.

Ne putem întreba pentru ce, în științele fizice, generalizarea îmbracă cu ușurință forma matematică. Argumentul este acum ușor de văzut; nu numai pentru că trebuie exprimate legi numerice, ci și pentru că fenomenul observabil este datorat suprapunerii unui mare număr de fenomene elementare, *toate asemănătoare între ele;* se introduc astfel, în mod cu totul natural, ecuațiile diferențiale.

Nu este suficient ca fiecare fenomen elementar să asculte de legi simple, este necesar ca toate acelea pe care trebuie să le combinăm să asculte de aceeași lege. Numai atunci intervenția matematicilor poate fi utilă; matematicile ne învață, într-adevăr, să combinăm similarul cu similarul. Scopul lor este de a prezice rezultatul unei combinații fără a avea nevoie de a reface această combinație element cu element. Dacă trebuie să repetăm de mai multe ori o aceeași operație, ele ne permit să evităm această repetiție, făcîndu-ne să cunoaștem dinainte rezultatul printr-un fel de inducție. Am explicat aceasta mai sus, în capitolul privitor la raționamentul matematic.

Dar, în acest scop, trebuie ca toate aceste operații să fie asemănătoare între ele; în caz contrar, ar trebui, evident, să ne resemnăm a le face efectiv una după alta și matematicile ar deveni inutile.

Datorită, deci, omogenității aproximative a materiei studiate de către fizicieni a putut să ia naștere fizica matematică.

În științele naturale nu mai întîlnim aceste condiții: omogenitatea, independența relativă a părților îndepărtate, simplitatea faptului elementar, — și din această cauză naturaliștii sînt obligați să recurgă la alte moduri de generalizare.

Capitolul X

Teoriile fizicii moderne

Semnificația teoriilor fizice. — Oamenii obișnuiți sînt uimiți cînd văd cît de efemere sînt teoriile științifice. După cîțiva ani de înflorire, ei le văd abandonate succesiv, ruinate unele peste altele; ei prevăd că teoriile la modă astăzi vor muri, la rîndul lor, într-un scurt timp și conchid de aici că teoriile sînt absolut vane. Este ceea ce numesc ei *falimentul științei*.

Scepticismul lor este superficial; ei nu își dau deloc seama de scopul și de rolul teoriilor științifice, altminteri ar înțelege că ruinele pot fi și ele încă bune la ceva.

Nici o teorie nu părea mai solidă decît aceea a lui Fresnel, care explica lumina prin mișcările eterului. Cu toate acestea, i se preferă acum teoria lui Maxwell. Vrea să spună aceasta că opera lui Fresnel a fost zadarnică? Nu, căci scopul lui Fresnel nu era de a ști dacă există realmente un eter, dacă el este format sau nu din atomi, dacă acești atomi se mișcă realmente în cutare sau cutare sens, ci acela de a prevedea fenomenele optice.

Or, acest fapt, teoria lui Fresnel îl permite încă — astăzi, la fel ca și înainte de Maxwell. Ecuațiile diferențiale sînt tot adevărate; pot fi integrate tot prin aceleași procedee și rezultatele

acestei integrări își păstrează mereu întreaga lor valoare.

N-aș vrea să se spună de aici că noi reducem astfel teoriile fizice la rolul de simple rețete practice; aceste ecuații exprimă raporturi și, dacă ecuațiile rămîn adevărate, aceasta se datorește faptului că raporturile în cauză își păstrează realitatea. Ele ne informează, după, ca și înainte, că există cutare raport între ceva și altceva; numai că acest ceva îl denumeam altădată *mișcare*, iar acum îl denumim *curent electric*. Însă aceste denumiri nu erau decît imagini substituite obiectelor reale pe care natura ni le ascunde mereu. Raporturile veritabile între aceste obiecte reale sînt singura realitate pe care o putem atinge, iar singura condiție este să existe aceleași raporturi între aceste obiecte ca între imaginile pe care sîntem forțați să le punem în locul lor. Dacă aceste raporturi ne sînt cunoscute, ce importanță are dacă noi considerăm comod să înlocuim o imagine prin alta.

Că fenomenul periodic cutare (o oscilație electrică, de exemplu) este datorat realmente vibrației cutărui atom care, comportîndu-se ca un pendul, se deplasează cu adevărat în cutare sau cutare sens — iată ceea ce nu este nici sigur, nici interesant. Dar că între oscilația electrică, mișcarea pendulului și toate fenomenele periodice există o înrudire intimă, care corespunde unei realități profunde; că această înrudire, această similitudine sau, mai degrabă, acest paralelism se continuă în amănunt; că ea este o consecință a unor principii mai generale, acela al energiei și acela al celei mai mici acțiuni, acest lucru îl putem afirma, acesta e adevărul care va rămîne totdeauna același, cu orice veșmînt l-am îmbrăca.

S-au propus numeroase teorii ale dispersiei; primele au fost imperfecte, conținînd doar o mică parte de adevăr. Mai tîrziu a apărut teoria

lui Helmholtz, care a fost modificată în diverse moduri, însuși autorul ei imaginînd altă teorie, fundată pe principiile lui Maxwell. Dar, lucru remarcabil, toți savanții care i-au urmat lui Helmholtz au ajuns la aceleași ecuații, avînd puncte de plecare în aparență foarte îndepărtate. Voi îndrăzni să spun că aceste teorii sînt toate adevărate în același timp, nu numai pentru că ele ne fac să prevedem aceleași fenomene, ci și pentru că ele pun în evidență un raport adevărat, acela al absorbției și al dispersiei anormale. În premisele acestor teorii, ce e adevărat este ceea ce e comun tuturor autorilor, anume afirmarea cutărui sau cutărui raport între anumite lucruri, pe care unii le denumesc cu un nume, iar alții cu un altul.

Teoria cinetică a gazelor a dat loc multor obiecții, cărora cu greu li s-ar putea răspunde, dacă ar exista pretenția să se constate aici adevărul absolut. Dar toate aceste obiecții nu vor împiedica faptul de a se vedea că ea a fost utilă, în special prin revelarea unui raport adevărat, fără ea profund ascuns, acela dintre presiunea gazoasă și presiunea osmotică. În acest sens, se poate spune, așadar, că ea este adevărată.

Cînd un fizician constată o contradicție între două teorii care îi sînt egal de apropiate, el spune uneori: Să nu fim neliniștiți din această pricină, căci noi ținem ferm în mîini cele două capete ale lanțului, deși verigile intermediare ne sînt ascunse. Acest argument de teolog încurcat ar fi ridicol dacă ar trebui să se atribuie teoriilor fizice sensul pe care li-l dau oamenii obișnuiți. În caz de contradicție, cel puțin una dintre ele ar trebui să fie privită ca falsă. Lucrurile nu mai stau astfel dacă aici se caută doar ceea ce trebuie să se caute. Se poate întîmpla ca două teorii să exprime raporturi adevărate și să nu existe o contradicție decît între imaginile în care am surprins realitatea.

Acelora care găsesc că noi restrîngem prea mult domeniul accesibil savantului, le voi răspunde: Aceste probleme, pe care noi vi le interzicem, iar voi le regretați, nu sînt doar insolubile, ci și iluzorii și lipsite de sens.

Cutare filosof pretinde că întreaga fizică se explică prin șocurile reciproce ale atomilor. Dacă el vrea să spună, în mod simplu, că între fenomenele fizice există aceleași raporturi ca între șocurile reciproce ale unui mare număr de bile, nimic mai bine, acest lucru este verificabil, este poate adevărat. Dar el vrea să spună ceva mai mult, și credem că îl înțelegem, deoarece socotim că știm ceea ce este șocul în sine; aceasta pentru că am văzut adeseori partide de biliard. Să înțelegem oare că Dumnezeu, contemplîndu-și opera, încearcă aceleași senzații ca și noi în timpul unei partide de biliard? Dacă nu vrem să dăm aserțiunii sale acest sens bizar, dacă nu vrem să-i dăm nici sensul restrîns despre care vorbeam adineauri și care este cel bun, atunci acesteia nu-i mai găsim nici unul.

Ipotezele de acest gen nu au deci decît un sens metaforic. Savantul nu trebuie să-și interzică mai mult metaforele decît și le interzice poetul; dar el trebuie să știe cît valorează acestea. Ele pot aduce satisfacție spiritului, nefiind dăunătoare doar dacă sînt ipoteze indiferente.

Aceste considerații ne explică pentru ce anumite teorii, pe care le credeam abandonate și definitiv infirmate de experiență, renasc deodată din propria cenușă, reîncepînd o viață nouă. Aceasta pentru că ele exprimau raporturi adevărate; și pentru că ele nu încetaseră să o facă atunci cînd, pentru un motiv sau altul, noi crezuserăm că trebuia să enunțăm aceleași raporturi într-un alt limbaj. Ele își păstraseră astfel un fel de viață latentă.

Acum abia cincisprezece ani exista oare ceva mai ridicol, vreun joc vechi mai naiv decît flui-

dele lui Coulomb? Şi totuşi, iată-le că reapar sub numele de *electroni*. Prin ce diferă aceste molecule electrizate permanent de moleculele electrice ale lui Coulomb? Este adevărat că electricitatea electronilor este purtată de puţină materie, de foarte puţină materie; cu alte cuvinte, ei au o masă (şi totuşi, iată că astăzi aceasta le este contestată); dar Coulomb nu refuza fluidelor sale masa, sau, dacă o făcea, o făcea cu rezerve. Ar fi temerar să se afirme că această credinţă în existenţa electronilor nu va slăbi niciodată; e totuşi curios să constaţi renaşterea ei neaşteptată.

Dar exemplul cel mai frapant îl constituie principiul lui Carnot. Carnot l-a stabilit pornind de la ipoteze greşite; cînd s-a descoperit că nu este indestructibilă căldura, dar că ea poate fi transformată în lucru mecanic, au fost abandonate complet ideile sale; apoi Clausius a revenit asupra lor şi le-a făcut să triumfe definitiv. Teoria lui Carnot, sub forma sa primitivă, exprima, pe lîngă raporturi adevărate, şi raporturi inexacte, rămăşiţe ale ideilor vechi; dar prezenţa raporturilor din urmă nu altera realitatea celorlalte. Clausius nu a avut decît să le îndepărteze, aşa cum se îndepărtează ramurile uscate.

Rezultatul a fost a doua lege fundamentală a termodinamicii. Erau aceleaşi raporturi, deşi ele nu mai aveau loc, cel puţin în aparenţă, între aceleaşi obiecte. Era de ajuns ca principiul să-şi păstreze valoarea. Raţionamentele lui Carnot nu au dispărut din această cauză; ele se aplicau unei materii viciate de eroare, dar forma lor (adică esenţialul) rămînea corectă.

Ceea ce am spus adineauri lămureşte în acelaşi timp rolul principiilor generale, cum este principiul celei mai mici acţiuni sau acela al conservării energiei.

Aceste principii au o foarte înaltă valoare; ele au fost obţinute căutîndu-se ce exista comun în

enunțul a numeroase legi fizice, reprezentînd deci chintesența a nenumărate observații.

Totuși, din însăși generalitatea lor rezultă o consecință asupra căreia am atras atenția în Capitolul VIII, anume că ele nu mai pot rămîne neverificate. Cum noi nu putem da o definiție generală a energiei, principiul conservării energiei semnifică simplu faptul că există *ceva* care rămîne constant. Ei bine, oricare ar fi noțiunile noi pe care experiențele viitoare ni le vor da despre lume, noi sîntem dinainte siguri că va fi ceva care va rămîne constant și pe care vom putea să-l numim *energie*.

Aceasta înseamnă a spune că principiul nu are nici un sens și că el se pierde într-o tautologie? Nicidecum, principiul ne arată că diferitele lucruri cărora noi le dăm numele de *energie* sînt legate printr-o adevărată înrudire; el afirmă existența între acestea a unui raport real. Dar atunci, dacă acest principiu are un sens, el poate fi și greșit; se poate întîmpla să nu avem dreptul de a-i extinde în mod indefinit aplicațiile și totuși să fim siguri dinainte că va fi verificat în accepțiunea strictă a cuvîntului. Dar cum vom fi noi avertizați atunci cînd el va fi atins în mod legitim întreaga sa extensiune? Foarte simplu, cînd el va înceta să ne fie util, cînd va înceta de a ne face să prevedem fenomene noi fără a ne înșela. Noi vom fi siguri în atare caz că raportul afirmat nu mai este real; altminteri el ar fi fecund; experiența, fără a contrazice direct o nouă extensiune a principiului, nu o va accepta totuși.

Fizica și mecanismul. — Cei mai mulți dintre teoreticieni au o predilecție constantă pentru explicațiile împrumutate din mecanică sau din dinamică. Unii ar fi satisfăcuți dacă ar putea să explice toate fenomenele prin mișcările de molecule care se atrag reciproc după anumite legi. Alții sînt mai exigenți, ei ar vrea să anuleze

atracțiile la distanță; moleculele ar urma traiectorii rectilinii, de la care ele nu ar putea fi deviate decît prin șocuri. Iar alții, cum este Hertz, suprimă de asemenea forțele, dar presupun moleculele lor ca avînd legături geometrice analoage cu acelea ale sistemelor noastre articulate; ei vor să reducă astfel dinamica la un fel de cinematică.

Într-un cuvînt, toți vor să mlădieze natura după o anumită formă, în afara căreia spiritul lor nu ar putea fi satisfăcut. Este însă natura destul de flexibilă pentru aceasta?

Vom examina chestiunea în Capitolul al XII-lea, în legătură cu teoria lui Maxwell. Vom vedea că, ori de cîte ori principiul energiei și al celei mai mici acțiuni sînt satisfăcute, nu numai că există o explicație mecanică posibilă, ci o infinitate. Datorită unei teoreme binecunoscute a lui Königs asupra sistemelor articulate, s-ar putea arăta că este posibil într-o infinitate de moduri să se explice totul prin legături în maniera lui Hertz, sau chiar prin forțe centrale. S-ar demonstra, de asemenea, cu ușurință, că totul se poate explica, totdeauna, prin simple șocuri.

Pentru aceasta, trebuie, bineînțeles, să nu ne mulțumim cu materia obișnuită, cu aceea care cade sub simțurile noastre și ale cărei mișcări le observăm în mod direct. Sau se va presupune că această materie este formată din atomi ale căror mișcări interne ne scapă, deplasarea de ansamblu rămînînd singura accesibilă simțurilor noastre, sau se va imagina vreunul dintre fluidele subtile care, sub numele de *eter* sau sub alte nume, au jucat în toate timpurile un rol atît de mare în teoriile fizice.

Adeseori se merge mai departe și se privește eterul ca singura materie primitivă sau chiar ca singura materie adevărată. Cei mai moderați consideră materia obișnuită ca eter condensat, ceea ce nu e deloc supărător; dar alții îi reduc și mai mult importanța și nu văd aici mai mult

decît locul geometric al singularităților eterului. De exemplu, pentru Lord Kelvin, ceea ce numim noi *materie* nu este decît locul punctelor în care eterul este animat de mișcări turbionare; pentru Riemann, ea este locul punctelor în care eterul este distrus în mod constant; pentru alți autori, mai recenți, Wiechert sau Larmor, ea este locul punctelor în care eterul suferă un fel de torsiune de o natură cu totul specială. Dacă vrem să ne situăm într-unul din aceste puncte de vedere, mă întreb cu ce drept se vor putea extinde la eter, sub pretextul că acesta este materie adevărată, proprietățile mecanice observate la materia obișnuită, care este o materie falsă.

Vechile fluide — caloric, electricitate etc. — au fost abandonate atunci cînd s-a constatat că nu este indestructibilă căldura. Dar ele au fost abandonate și pentru un alt motiv. Materializîndu-le, se accentua, pentru a spune astfel, individualitatea lor, se adîncea între ele un fel de prăpastie. Această prăpastie n-a mai existat atunci cînd s-a înregistrat un sentiment mai viu al unității naturii și cînd s-au descoperit relațiile intime din natură care îi unește toate părțile. Vechii fizicieni, nu numai că, înmulțind fluidele, creau ființe fără trebuință, dar ei rupeau legăturile adevărate.

Nu este suficient ca o teorie să nu afirme raporturi false, trebuie ca ea să nu ascundă raporturile adevărate.

Există eterul în mod real?

Se știe de unde ne vine credința în eter. Dacă lumina care ne sosește de la o stea îndepărtată într-un interval de mai mulți ani a părăsit steaua, dar nu a ajuns încă pe pămînt, trebuie că ea se află undeva, fiind purtată de vreun suport material.

Se poate exprima aceeași idee sub o formă mai matematică și mai abstractă. Ceea ce con-

statăm noi sînt schimbările suferite de moleculele materiale; vedem, de exemplu, că placa noastră fotografică suportă consecințele fenomenelor al căror teatru, cu mai mulți ani înainte, a fost masa incandescentă a stelei. Or, în mecanica obișnuită, starea sistemului studiat nu depinde decît de starea sa dintr-un moment imediat anterior; sistemul satisface deci ecuații diferențiale. Din contră, dacă noi nu am crede în eter, starea universului material ar depinde nu numai de starea imediat anterioară, ci și de stări mult mai vechi; sistemul ar satisface ecuații cu diferențe finite. Pentru a scăpa de această derogare de la legile generale ale mecanicii am inventat noi eterul.

Dar aceasta nu ne-ar obliga decît să umplem, cu eter, vidul interplanetar, iar nu de a face eterul să pătrundă în mediile materiale înseși. Experiența lui Fizeau merge mai departe. Prin interferența razelor care traversează aerul sau apa în mișcare, ea pare să ne arate două medii diferite care se pătrund și totuși se deplasează unul în raport cu celălalt. Crezi că atingi eterul cu degetul.

Se pot concepe totuși experiențe care ne-ar face să-l atingem și mai mult. Să presupunem că principiul lui Newton, al egalității acțiunii și reacției, nu mai este adevărat dacă e aplicat materiei *singure* și că se ajunge la această constatare. Suma geometrică a tuturor forțelor aplicate asupra tuturor moleculelor materiale nu ar mai fi nulă. În acest caz ar trebui, într-adevăr, dacă nu am vrea să schimbăm întreaga mecanică, să introducem eterul, pentru ca această acțiune la care materia pare a fi supusă să fie contrabalansată de reacția materiei asupra ceva.

Sau, mai mult, presupun că se recunoaște că fenomenele optice și electrice sînt influențate de mișcarea pămîntului. Am fi determinați să conchidem că aceste fenomene ar putea să ne dezvăluie

nu numai mișcările relative ale corpurilor materiale, dar și ceea ce ar părea să fie mișcările lor absolute. Ar trebui, și mai mult, să existe un eter, pentru ca aceste așa-zise mișcări absolute să nu fie deplasări în raport cu un spațiu vid, ci în raport cu ceva concret.

Se va ajunge vreodată aici? Eu nu am nici o speranță, voi spune imediat pentru ce, și totuși ea nu este atît de absurdă, întrucît alții au avut-o.

De exemplu, dacă teoria lui Lorentz, despre care voi vorbi mai departe în detaliu în Capitolul al XIII-lea, ar fi adevărată, principiul lui Newton nu s-ar aplica materiei *singure*, iar diferența ar fi aproape accesibilă experienței.

Pe de altă parte, s-au efectuat multe cercetări asupra influenței mișcării pămîntului. Rezultatele au fost totdeauna negative. Dar dacă s-au întreprins astfel de experiențe, aceasta se datorește faptului că cercetătorii nu erau dinainte siguri de acest lucru, și chiar, după teoriile dominante, compensarea nu ar fi decît aproximativă, trebuind să se aștepte apariția unor metode precise, care să dea rezultate pozitive.

Eu cred că o atare speranță este iluzorie; era totuși bizar să dovedești că un succes de acest gen ne-ar deschide, pentru a spune astfel, o lume nouă.

Și acum să mi se permită o digresiune; trebuie să explic, într-adevăr, pentru ce nu cred, în ciuda lui Lorentz, că niște observații mai precise ar putea să pună vreodată în evidență altceva decît deplasările relative ale corpurilor materiale. S-au întreprins experiențe care ar fi trebuit să deceleze termenii de ordinul întîi; rezultatele au fost negative; putea fi aceasta din întîmplare? Nimeni nu a admis acest lucru; s-a căutat o explicație generală, iar Lorentz a găsit-o; el a arătat că termenii de ordinul întîi trebuiau desființați, dar nu se putea face la fel cu cei de ordinul al doilea. Atunci s-au efectuat experiențe

mai precise; și ele au fost negative; nici acest lucru nu putea fi efectul hazadului; trebuia o explicație; a fost găsită; se găsesc totdeauna explicații; ipotezele constituie capitalul care lipsește cel mai puțin.

Dar nu este de ajuns; cine nu vede că se acordă și aici un rol prea mare hazardului? Nu ar fi, de asemenea, un hazard coincidența ciudată care ar face ca o anumită circumstanță să vină exact la momentul potrivit pentru a anula termenii de ordinul întîi, iar o altă circumstanță, cu totul diferită, dar la fel de oportună, să anuleze termenii de ordinul al doilea? Nu, trebuie să se găsească o aceeași explicație pentru ambele categorii de termeni, și atunci sîntem nevoiți să socotim că această explicație va fi valabilă și pentru termenii de ordin superior, iar că anularea reciprocă a termenilor va fi riguroasă și absolută.

Starea actuală a științei. — În istoria dezvoltării fizicii se disting două tendințe inverse. Pe de o parte, se descoperă în fiecare moment legături noi între obiecte care păreau că trebuie să rămînă separate pentru totdeauna; fapte risipite încetează de a mai fi străine unele față de altele; ele tind să se ordoneze într-o sinteză impunătoare. Știința merge spre unitate și simplitate.

Pe de altă parte, observația ne dezvăluie în fiecare zi fenomene noi; ele trebuie să-și aștepte mult timp locul și, cîteodată, pentru a le face acest loc, trebuie să se demoleze un colț al edificiului. În înseși fenomenele cunoscute, unde simțurile noastre grosiere ne indicau o uniformitate, noi descoperim detalii din zi în zi mai variate; ceea ce credeam simplu devine complex și știința pare că merge spre varietate și complicație.

Din aceste două tendințe inverse, ce par să domine pe rînd, care va învinge? Dacă va fi

prima, atunci știința este posibilă; dar nimic nu dovedește acest lucru *a priori*, și ne putem teme că, după ce am făcut eforturi pentru a subordona natura, împotriva ei, idealului nostru de unitate, copleșiți de talazul mereu în creștere al noilor noastre bogății, va trebui să renunțăm la clasificarea lor, să abandonăm idealul nostru și să reducem știința la înregistrarea a nenumărate constatări.

La această întrebare nu putem să răspundem. Tot ceea ce putem face este să observăm știința de astăzi și să o comparăm cu cea de ieri. Din această examinare vom putea, fără îndoială, să facem cîteva prezumții.

Acum o jumătate de secol existau cele mai mari speranțe. Descoperirea conservării energiei și a transformărilor sale ne dezvăluia tocmai unitatea forței. Ea dovedea astfel că fenomenele căldurii puteau fi explicate prin mișcări moleculare. Care era natura acestor mișcări, nu se știa exact, dar nu exista îndoială că se va ști peste puțin timp. Cît despre lumină, lucrurile păreau a fi clare. În ceea ce privește electricitatea, situația era alta. Electricitatea tocmai își anexase magnetismul. Era un pas considerabil către unitate, un pas definitiv. Dar cum să reintre electricitatea, la rîndul ei, în unitatea generală, cum să se reîntoarcă ea la mecanismul universal? Nu exista nici o idee în această privință. Posibilitatea reintegrării ei nu era însă pusă la îndoială de nimeni, se credea în aceasta. În sfîrșit, în ceea ce privește proprietățile moleculare ale corpurilor materiale, integrarea în mecanismul universal părea și mai ușoară, dar detaliile rămîneau în ceață. Într-un cuvînt, speranțele erau mari, erau vii, dar vagi.

Astăzi, ce vedem?

Mai întîi un prim progres, un progres imens. Raporturile dintre electricitate și lumină sînt acum cunoscute; cele trei domenii — al luminii, al electricității și al magnetismului — altădată se-

parate, formează azi unul singur; și legătura dintre ele pare definitivă.

Această cucerire ne-a cerut totuși unele sacrificii. Fenomenele optice intră ca niște cazuri particulare printre fenomenele electrice; atît timp cît ele erau izolate, era ușor să le explici prin mișcări despre care se credea că sînt cunoscute în toate detaliile lor; dar acum, o explicație, pentru a fi acceptabilă, trebuie să se extindă fără greutate la întregul domeniu electric. Or, lucrul acesta întîmpină dificultăți.

Ceea ce avem mai satisfăcător în acest domeniu este teoria lui Lorentz, care, așa cum vom vedea în ultimul capitol, explică curenții electrici prin mișcările unor mici particule electrizate; fără îndoială, este teoria care explică cel mai bine faptele cunoscute, cea care pune în lumină cel mai mare număr de raporturi adevărate, teoria din care se vor regăsi cele mai multe urme în construcția definitivă. Totuși, ea are încă un defect grav, pe care l-am semnalat mai sus: este contrarie principiului lui Newton, al egalității acțiunii și reacției; sau, mai degrabă, acest principiu, în ochii lui Lorentz, nu ar fi aplicabil materiei singure; pentru ca el să fie adevărat, ar trebui să țină seamă de acțiunile exercitate de eter asupra materiei și de reacția materiei asupra eterului. Or, pînă la o nouă ordine, probabil că lucrurile nu se petrec astfel.

Oricum, datorită lui Lorentz, rezultatele lui Fizeau asupra opticii corpurilor în mișcare, legile dispersiei normale și anormale și ale absorbției sînt legate între ele și cu celelalte proprietăți ale eterului prin legături care, fără nici o îndoială, nu se vor rupe. Vedeți ușurința cu care fenomenul nou al lui Zeeman și-a găsit locul gata pregătit, ajutînd chiar la plasarea rotației magnetice a lui Faraday, care nu răspunsese eforturilor lui Maxwell; această ușurință dovedește, într-adevăr, că teoria lui Lorentz nu este o înjghe-

bare artificială menită să se destrame. Va trebui probabil să fie modificată, dar nu distrusă.

Dar Lorentz nu avea altă ambiție decît să cuprindă într-un același domeniu întreaga optică și electro-dinamica corpurilor în mișcare; el nu avea pretenția să-i dea o explicație mecanică. Larmor merge mai departe; păstrînd teoria lui Lorentz în ceea ce are ea esențial, el grefează aici ideile lui Mac-Cullagh asupra direcției mișcărilor eterului. Pentru el, viteza eterului ar avea aceeași direcție și aceeași mărime ca forța magnetică. Această viteză ne este deci cunoscută pentru că forța magnetică este accesibilă experienței. Oricît de ingenioasă ar fi această tentativă, defectul teoriei lui Lorentz subzistă și chiar se agravează. Acțiunea nu este egală cu reacția. Cu Lorentz, noi nu știam care sînt mișcările eterului; datorită acestei ignoranțe, noi puteam să le presupunem astfel încît, compensîndu-le pe acelea ale materiei, ele să restabilească egalitatea acțiunii și a reacției. Cu Larmor, noi cunoaștem mișcările eterului și putem constata că această compensare nu are loc.

Dacă Larmor, după opinia mea, a eșuat, înseamnă aceasta că o explicație mecanică este imposibilă? Dimpotrivă: am spus mai sus că, de îndată ce un fenomen se supune celor două principii, al energiei și al celei mai mici acțiuni, el comportă o infinitate de explicații mecanice; astfel stau, deci, lucrurile cu fenomenele optice și electrice.

Dar aceasta nu este de ajuns; pentru ca o explicație mecanică să fie bună, trebuie ca ea să fie simplă; trebuie, pentru a o alege dintre toate acelea care sînt posibile, să ai alte rațiuni decît necesitatea de a face o alegere. Ei bine, o teorie care să satisfacă această condiție și, prin urmare, care să poată servi la ceva, noi nu avem încă. Trebuie să ne plîngem din această pricină? Ar însemna să uităm care este scopul urmărit;

nu este mecanismul, — adevăratul, singurul scop, este unitatea.

Trebuie, așadar, să ne limităm ambiția; să nu căutăm să formulăm o explicație mecanică; să ne mulțumim să arătăm că noi am putea oricînd să găsim una, dacă am vrea. În această privință am reușit; principiul conservării energiei nu a primit decît confirmări; un al doilea principiu a venit să i se alăture, acela al celei mai mici acțiuni, pus sub forma care îi convine fizicii. Și el a fost totdeauna verificat, cel puțin în ceea ce privește fenomenele reversibile, care se supun astfel ecuațiilor lui Lagrange, adică celor mai generale legi ale mecanicii.

Fenomenele ireversibile sînt mult mai rebele. Totuși și ele tind să intre în unitate: cel care le-a făcut clare este principiul lui Carnot. Multă vreme termodinamica s-a limitat la studiul dilatării corpurilor și al schimbărilor lor de stare. De cîtva timp, ea a prins curaj și și-a lărgit considerabil domeniul. Noi îi datorăm teoria pilei, cea a fenomenelor termoelectrice; nu există în întreaga fizică un ungher pe care ea să nu-l fi explorat, intrînd chiar în domeniul chimiei. Pretutindeni domnesc aceleași legi; pretutindeni, sub diversitatea aparențelor, se regăsește principiul lui Carnot; de asemenea, peste tot acest concept atît de înalt abstract al entropiei, cu același grad de universalitate ca și acela al energiei, implică, la fel ca acesta, o realitate. Doar căldura radiantă părea că-i scapă; recent, s-a putut constata că ea se supune acelorași legi.

În acest mod ni s-au dezvăluit analogii noi, care adeseori se continuă pînă în detalii; rezistența ohmică seamănă cu vîscozitatea lichidelor; histerezisul ar semăna mai degrabă cu frecarea solidelor. În toate cazurile, frecarea pare tipul pe care îl copiază fenomenele ireversibile cele mai diverse, și această înrudire este reală și profundă.

S-a căutat, de asemenea, o explicație mecanică propriu-zisă a acestor fenomene. Ele nu se pretau deloc la aceasta. Pentru a găsi explicația potrivită, a trebuit să se presupună că ireversibilitatea nu este decît o aparență, că fenomenele elementare sînt reversibile și se supun legilor cunoscute ale dinamicii. Dar elementele sînt extrem de numeroase și se amestecă din ce în ce mai mult, astfel încît pentru privirea noastră grosieră totul pare să tindă spre uniformitate, adică totul pare să meargă în același sens, fără speranță de reîntoarcere. Ireversibilitatea aparentă nu este astfel decît un efect al legii numerelor mari. Numai o ființă ale cărei simțuri ar fi extrem de subtile, ca demonul imaginar al lui Maxwell, ar putea să descurce aceste ițe inextricabile și să aducă lumea înapoi.

Această concepție, care se leagă de teoria cinetică a gazelor, a costat mari eforturi și a fost, cu un cuvînt, destul de puțin fecundă; dar ea ar putea să devină astfel. Nu este locul aici să examinăm dacă ea nu duce la contradicții și dacă ea este, într-adevăr, conformă cu veritabila natură a lucrurilor.

Să semnalăm totuși ideile originale ale lui Gouy asupra mișcării browniene. După acest savant, mișcarea aceasta ciudată ar scăpa principiului lui Carnot. Particulele pe care ea le animă ar fi mai mici decît ochiurile acestor ițe atît de strînse; ele ar fi, așadar, în măsură să le descurce și, prin aceasta, să facă lumea să meargă în sens invers. S-ar crede că vedem la lucru demonul lui Maxwell!

În rezumat, fenomenele cunoscute odinioară sînt ordonate din ce în ce mai bine; însă fenomene noi vin să-și reclame un loc; cele mai multe dintre ele, cum este acela al lui Zeemann, și l-au găsit imediat.

Dar s-au descoperit razele catodice, razele X, ale uraniului și radiului. Este aici o întreagă

lume, pe care nimeni nu o bănuia. Cîți oaspeți neașteptați trebuie cazați!

Nimeni nu poate să prevadă încă locul pe care îl vor ocupa. Dar nu cred că ei vor distruge unitatea generală, cred mai degrabă că o vor completa. Pe de o parte, într-adevăr, radiațiile noi par legate de fenomenele de luminescență; nu numai că stimulează fluorescența, dar ele iau naștere cîteodată în aceleași condiții ca aceasta.

Ele au o legătură și cu cauzele care fac să declanșeze scînteia sub acțiunea luminii ultraviolete.

În sfîrșit, și mai ales, se crede că se regăsesc în toate aceste fenomene veritabili ioni animați, este adevărat, de viteze incomparabil mai mari decît în electroliți.

Toate aceste cunoștințe ale noastre sînt vagi, dar ele se vor preciza.

Fosforescența, acțiunea luminii asupra scînteii erau domenii cam izolate și, prin urmare, cam părăsite de către cercetători. Se poate spera acum că se va realiza o legătură cu ele care va ușura comunicația lor cu știința universală.

Dar nu numai că descoperim fenomene noi, ci, în cele pe care credeam că le cunoaștem, ies la lumină aspecte neașteptate. În eterul liber, legile își păstrează majestuoasa lor simplitate; dar materia propriu-zisă pare din ce în ce mai complexă; tot ce se spune despre ea nu este niciodată decît aproximativ și în fiecare moment formulele noastre cer noi termeni.

Totuși cadrele nu sînt sfărîmate; raporturile pe care le recunoscusem între obiecte socotite simple subzistă încă între aceste obiecte, atunci cînd le cunoaștem complexitatea; și acest lucru are importanță. Ecuațiile noastre devin din ce în ce mai complicate, este adevărat, pentru a urmări mai de aproape complexitatea naturii; dar nimic nu s-a schimbat în relațiile care permit

să se deducă aceste ecuații unele din altele. Într-un cuvînt, forma acestor ecuații a rezistat.

Să luăm ca exemplu legile reflecției; Fresnel le stabilise printr-o teorie simplă și seducătoare, pe care experiența părea să o confirme. De atunci, cercetări mai precise au dovedit că această verificare nu era decît aproximativă; ele au arătat pretutindeni urme de polarizare eliptică. Dar, datorită sprijinului pe care ni-l oferea prima aproximație, s-a găsit imediat cauza acestor anomalii, care constă în prezența unui strat de pasaj; și teoria lui Fresnel s-a menținut în ceea ce avea ea esențial.

Numai că nu ne putem opri să facem o reflecție: toate aceste raporturi ar fi rămas neobservate dacă oamenii de știință ar fi bănuit de la început complexitatea obiectelor pe care le leagă raporturile. Acum multă vreme s-a spus: dacă Tycho ar fi avut instrumente de zece ori mai precise, nu ar fi existat niciodată nici Kepler, nici Newton, nici Astronomie. Este o nenorocire pentru o știință de a lua naștere prea tîrziu, cînd mijloacele de observație au devenit perfecte. Este ce se întîmplă astăzi cu fizico-chimia; fondatorii săi sînt încurcați în privirea lor de ansamblu de zecimalele a treia și a patra; din fericire, sînt oameni cu o credință fermă, puternică.

Pe măsură ce se cunosc mai bine proprietățile materiei, se observă cum aici stăpînește continuitatea. În urma lucrărilor lui Andrews și ale lui Van der Waals, ne dăm seama de modul în care se face trecerea de la starea lichidă la starea gazoasă și că această trecere nu este bruscă. La fel, nu există o totală lipsă de legătură între stările lichidă și solidă; în dările de seamă ale unui congres recent figura alături de o lucrare asupra rigidității lichidelor, un memoriu asupra curgerii solidelor.

Cu această tendință, simplitatea pierde, fără îndoială; cutare fenomen era reprezentat prin

mai multe drepte: trebuie să se racordeze aceste drepte prin curbe mai mult sau mai puțin complicate. În schimb, unitatea cîștigă aici mult. Aceste categorii distincte — simplitatea și unitatea — odihneau spiritul, dar ele nu îl satisfăceau.

În sfîrșit, metodele fizicii au invadat un domeniu nou, acela al chimiei; s-a născut astfel fizicochimia. Ea este încă foarte tînără, dar se vede deja că ea ne va permite să legăm între ele fenomene cum sînt electroliza, osmoza, mișcările ionilor.

Ce vom conchide în urma acestei expuneri rapide?

În sinteză, s-a înregistrat apropierea de unitate, nu atît de repede pe cît se spera acum cincizeci de ani, pentru că nu s-a apucat totdeauna drumul prevăzut; dar, în definitiv, s-a cîștigat mult teren.

Capitolul XI

Calculul probabilităților

Va stîrni, fără îndoială, uimire faptul de a se găsi în acest loc reflecții asupra calculului probabilităților. Ce are de-a face acesta cu metoda științelor fizice?

Și totuși chestiunile pe care le voi ridica, fără a le rezolva, se impun în mod natural filosofului care vrea să reflecteze asupra fizicii.

Și aceasta în așa măsură, încît în cele două capitole precedente am fost forțat de mai multe ori să pronunț cuvintele „probabilitate" și „hazard"

Faptele prevăzute, spuneam mai sus, nu pot fi decît probabile. „Oricît de trainic fundamentată ni s-ar putea părea o previziune, noi nu sîntem niciodată siguri în mod absolut că experiența nu o va

dezminți. Dar probabilitatea este adeseori destul de mare pentru ca, practic, să ne putem mulțumi cu ea".

Și ceva mai departe, am adăugat:

„Să vedem ce rol joacă în generalizările noastre credința în simplitate. Noi am verificat o lege simplă într-un număr destul de mare de cazuri particulare; refuzăm să admitem că acest fapt, repetat atît de frecvent, este un simplu efect al hazardului..."

Astfel, într-o mulțime de circumstanțe, fizicianul se găsește în aceeași situație în care se găsește și jucătorul care își evaluează șansele. Ori de cîte ori raționează prin inducție, el face uz, mai mult sau mai puțin conștient, de calculul probabilităților.

Iată, așadar, pentru ce sînt obligat să deschid o paranteză și să întrerup studiul nostru asupra metodei în științele fizice, examinînd ceva mai de aproape cît valorează acest calcul și cîtă încredere merită el să-i acordăm.

Însuși numele de „calcul al probabilităților" este un paradox: probabilitatea, opusă certitudinii, este ceea ce nu se știe, dar atunci cum se poate calcula ceea ce nu se cunoaște? Totuși, mulți savanți eminenți s-au ocupat cu acest calcul, și nu s-ar putea nega că știința nu a avut un anumit profit de pe urma sa. Cum să explicăm această aparentă contradicție?

Probabilitatea a fost definită? Poate fi ea definită? Iar dacă ea nu poate fi definită, cum e posibil să se raționeze asupra ei? Definiția, se va spune, este foarte simplă: probabilitatea unui eveniment este raportul dintre numărul de cazuri favorabile acestui eveniment și numărul total al cazurilor posibile.

Un exemplu simplu ne va face să înțelegem cît de incompletă este această definiție. Arunc două zaruri; care este probabilitatea ca cel puțin unul dintre cele două zaruri să arate șase? Fie-

care zar poate să cadă în șase poziții diferite: numărul cazurilor posibile este de $6 \times 6 = 36$; numărul cazurilor favorabile este de 11; probabilitatea este $\frac{11}{36}$.

Este soluția corectă. Dar n-aș putea să spun tot așa de bine: pozițiile luate de cele două zaruri pot forma $\frac{6 \times 7}{2} = 21$ combinații diferite? Printre aceste combinații, 6 sînt favorabile; probabilitatea este $\frac{6}{21}$.

De ce primul mod de a enumera cazurile posibile este mai legitim decît cel de-al doilea? În orice caz, nu definiția noastră este cea care ne răspunde.

Sîntem deci siliți să completăm această definiție spunînd: „...și numărul total al cazurilor posibile, cu condiția ca aceste cazuri să fie la fel de probabile". Iată-ne deci siliți să definim probabilul prin probabil.

Cum vom ști noi că două cazuri posibile sînt la fel de probabile? Printr-o convenție? Dacă plasăm la începutul fiecărei probleme o convenție explicită, totul va merge bine, nu va mai fi nevoie decît să aplicăm regulile aritmeticii și ale algebrei, mergînd pînă la capătul calculului fără ca rezultatul să poată fi pus la îndoială; dar de îndată ce vom vrea să facem cea mai mică aplicație, va trebui să demonstrăm că era legitimă convenția noastră, găsindu-ne din nou în fața dificultății pe care crezusem că am eludat-o.

Se va putea susține oare că bunul simț este suficient pentru a ne învăța ce convenție trebuie să facem? Vai! J. Bertrand s-a amuzat să discute o problemă simplă: „Care este probabilitatea pentru ca, într-o circumferință, o coardă să fie mai mare decît latura triunghiului echilateral înscris?" Ilustrul geometru a adoptat suc-

cesiv două convenții pe care bunul simț părea să le impună în mod egal, și a găsit cu una $\frac{1}{2}$, cu cealaltă $\frac{1}{3}$.

Concluzia care pare să rezulte din toate acestea este următoarea: calculul probabilităților este o știință zadarnică; nu trebuie avut încredere în acest instinct obscur pe care îl numim bun-simț și căruia îi cerem să ne legitimeze convențiile.

Dar la această concluzie noi nu putem subscrie; de acest instinct obscur nu ne putem lipsi; fără el știința ar fi imposibilă, fără el nu am putea nici să descoperim o lege, nici s-o aplicăm. Avem dreptul, de exemplu, să enunțăm legea lui Newton? Fără îndoială, numeroase observații sînt în concordanță cu ea; dar nu este oare aici un simplu efect al hazardului? Cum știm noi dacă această lege, adevărată de atîtea secole, va fi valabilă anul viitor? La această obiecție nu veți găsi nimic de răspuns, afară poate de: „Aceasta este foarte puțin probabil".

Dar să admitem legea; grație ei, eu cred că pot să calculez poziția lui Jupiter peste un an. Am eu acest drept? Cine îmi spune că o masă gigantică, animată de o viteză enormă, nu are să treacă pînă atunci aproape de sistemul solar și să producă perturbații neprevăzute? Nici aici nu există nimic de răspuns, afară poate de: „Aceasta este foarte puțin probabil."

Judecînd astfel, toate științele nu ar fi decît aplicații inconștiente ale calculului probabilităților; a condamna acest calcul, ar fi să condamni știința în întregime.

Voi insista mai puțin asupra problemelor științifice în care intervenția calculului probabilităților este mai evidentă. Astfel este în primul rînd problema interpolării, în care, cunoscînd un anumit număr de valori ale unei funcții, se caută să se prezică valorile intermediare.

Voi cita, de asemenea: celebra teorie a erorilor de observație, asupra căreia voi reveni, teoria cinetică a gazelor, ipoteză binecunoscută, în care fiecare moleculă gazoasă este presupusă că descrie o traiectorie extrem de complicată, dar în care, prin efectul numerelor mari, fenomenele medii, singurele observabile, ascultă de legi simple, care sînt cea a lui Mariotte și cea a lui Gay-Lussac.

Toate aceste teorii sînt întemeiate pe legile numerelor mari, iar calculul probabilităților le-ar aduce la ruină. Este adevărat că acestea nu comportă decît un interes particular și că, excepție făcînd interpolarea, e vorba de niște sacrificii pe care le-am putea înțelege.

Dar, așa cum am spus mai sus, nu e vorba numai de aceste sacrificii parțiale, ci de știința în întregime, a cărei legitimitate ar fi pusă la îndoială.

Văd bine ce s-ar putea spune: „Sîntem ignoranți și totuși trebuie să acționăm. Pentru a acționa, nu avem timpul să ne informăm suficient spre a risipi ignoranța; o asemenea informare ar cere un timp nesfîrșit. Trebuie, așadar, să decidem fără a ști; trebuie, într-adevăr, să procedăm la noroc și să urmăm niște reguli în care nu prea credem. Ceea ce știu nu este că un anume lucru este adevărat, ci faptul că cel mai bine pentru mine este de a acționa ca și cum el ar fi adevărat." Calculul probabilităților și, prin urmare, știința, nu ar mai avea astfel decît o valoare practică.

Din nefericire, dificultatea nu dispare așa; un jucător vrea să-și încerce norocul; îmi cere sfatul. Dacă i-l dau, mă voi inspira din calculul probabilităților, dar nu îi voi garanta succesul. Este ceea ce voi numi *probabilitatea subiectivă*. În acest caz, s-ar putea să ne mulțumim cu explicația pe care am schițat-o mai sus. Dar să presupun că un observator asistă la joc, că el își notează toate loviturile și că jocul se prelungește

mult timp; cînd va face bilanțul însemnărilor din carnet, va constata că evenimentele s-au repartizat conform legilor calculului probabilităților. Este ceea ce voi numi *probabilitatea obiectivă*, acest fenomen fiind cel pe care ar trebui să-l explic.

Există numeroase societăți de asigurare care aplică regulile calculului probabilităților, distribuind acționarilor lor dividende a căror realitate obiectivă nu ar putea fi contestată. Nu este de ajuns, pentru a le explica, să se invoce ignoranța noastră și necesitatea de a acționa.

Astfel, scepticismul absolut nu este de admis; trebuie să fim neîncrezători, dar nu putem condamna în loc; este necesar să discutăm.

I. — **Clasificarea problemelor de probabilitate.** — Pentru a clasifica problemele care privesc probabilitățile, putem să considerăm mai multe puncte de vedere diferite, și, mai întîi, *punctul de vedere al generalității*. Am spus mai sus că probabilitatea este raportul dintre numărul cazurilor favorabile și numărul cazurilor posibile. Ceea ce, în lipsa unui termen mai bun, numesc generalitate, va crește odată cu numărul cazurilor posibile. Acest număr poate fi finit; ca, de exemplu, dacă se consideră o aruncare de zaruri, unde numărul cazurilor posibile este 36. Avem aici primul grad de generalitate.

Dar, dacă întrebăm, de exemplu, care este probabilitatea ca un punct interior unui cerc să fie interior pătratului înscris, există atîtea cazuri posibile cîte puncte sînt în cerc, adică o infinitate. Acesta este al doilea grad de generalitate. Generalitatea poate fi împinsă și mai departe: putem să ne întrebăm care este probabilitatea ca o funcție să satisfacă o condiție dată; există atunci atîtea cazuri posibile cîte funcții diferite pot fi imaginate. Este al treilea grad de generalitate, la care ne ridicăm, de exemplu, atunci cînd

încercăm să prezicem legea cea mai probabilă după un număr finit de observații.

Putem să considerăm un punct de vedere cu totul diferit. Dacă n-am fi ignoranți, n-ar exista nici probabilitate, n-ar fi loc decît pentru certitudine; dar ignoranța noastră nu poate fi absolută, fără de care fapt n-ar exista nici probabilitate, întrucît trebuie și puțină lumină pentru a ajunge la această știință încertă. Problemele probabilității pot fi astfel clasificate după mărimea acestei ignorante.

În matematici, se pot propune deja probleme de probabilitate. Care este probabilitatea pentru ca a 5-a zecimală a unui logaritm luat la întîmplare dintr-o tabelă de logaritmi să fie 9? Nu vom ezita să răspundem că această probabilitate este 1/10. Aici noi posedăm toate datele problemei; am putea să calculăm logaritmul fără a recurge la tabele; dar nu vrem să ne dăm osteneala. Este primul grad de ignoranță.

În științele fizice, ignoranța noastră este deja mai mare. Starea unui sistem, la un moment dat, depinde de două lucruri: starea sa inițială și legea după care variază această stare. Dacă noi am cunoaște în același timp această lege și starea inițială, nu am mai avea de rezolvat decît o problemă matematică și am reveni la primul grad de ignoranță.

Dar se întîmplă adeseori să se cunoască legea și să nu se cunoască starea inițială. Se pune întrebarea, de exemplu, care este distribuția actuală a micilor planete; noi știm că dintotdeauna ele s-au supus legilor lui Kepler, dar ignorăm care era distribuția lor inițială.

În teoria cinetică a gazelor, se presupune că moleculele gazoase urmează traiectorii rectilinii și se supun legilor ciocnirii corpurilor elastice; dar, cum nu se știe nimic despre vitezele lor inițiale, nu se știe nimic despre vitezele lor actuale.

Numai calculul probabilităților permite să se prevadă fenomenele medii care vor rezulta din combinația acestor viteze. Avem aici al doilea grad de ignoranță.

Este posibil, în fine, ca nu numai condițiile inițiale, dar și legile însești să fie necunoscute; se înregistrează atunci cel de-al treilea grad de ignoranță și, în general, nu se mai poate afirma absolut nimic cu privire la probabilitatea unui fenomen.

Se întîmplă adeseori ca, în loc de a se căuta să se prezică un eveniment după o cunoaștere mai mult sau mai puțin imperfectă a legii, să se cunoască evenimentele și să se caute a se prezice legea; în loc de a se deduce efectele din cauze, se vrea a se deduce cauzele din efecte. Acestea sînt problemele zise de *probabilitate a cauzelor*, cele mai interesante din punctul de vedere al aplicațiilor lor științifice.

Fac o partidă de *écarté* cu o persoană pe care o știu absolut cinstită; partenerul va da carte; care este probabilitatea ca el să scoată riga? Este de $\frac{1}{8}$; avem aici o problemă de probabilitate a efectelor. Joc cu o persoană pe care nu o cunosc; aceasta a dat carte de 10 ori și a scos riga de 6 ori; care este probabilitatea ca partenerul să fie un trișor? Avem aici o problemă de probabilitate a cauzelor.

Se poate spune că aceasta este problema esențială a metodei experimentale. Am observat n valori ale lui x și valorile corespunzătoare ale lui y; am constatat că raportul dintre secundele și primele este constant. Iată evenimentul; care este cauza?

Este oare probabil să existe o lege generală conform căreia y ar fi proporțional cu x, iar micile diferențe să fie datorate unor erori de observații? Iată un gen de întrebare pe care sîntem conduși să ne-o punem fără încetare și pe care o

rezolvăm în mod inconștient ori de cîte ori facem investigații științifice.

Voi trece acum în revistă diferitele categorii de probleme examinînd succesiv ceea ce am denumit mai sus probabilitatea subiectivă și probabilitatea obiectivă.

II. — **Probabilitatea în științele matematice.** — Imposibilitatea cuadraturii cercului este demonstrată din 1883; dar, mult înainte de această dată, toți geometrii considerau o astfel de imposibilitate ca fiind atît de „probabilă", încît Academia de Științe respingea fără examinare memoriile, vai! prea numeroase, pe care cîțiva nefericiți nebuni i le trimiteau în fiecare an cu privire la acest subiect.

Greșea ea în acest caz? Evident, nu, știind bine că, acționînd astfel, nu risca să înăbușe o descoperire serioasă. Ea nu ar fi putut să demonstreze că avea dreptate; dar știa bine că instinctul său nu o înșală. Dacă i-ați fi întrebat pe academicieni, ei v-ar fi răspuns: „Noi am comparat probabilitatea ca un savant necunoscut să fi găsit ceea ce se caută zadarnic de atîta amar de vreme cu faptul că există un nebun în plus pe pămînt; cea de-a doua ni s-a părut mai mare." Avem aici rațiuni foarte serioase, dar ele nu au nimic matematic, ele sînt pur psihologice.

Și dacă ați fi insistat ei ar fi adăugat: „Pentru ce vreți ca o valoare particulară a unei funcții transcedente să fie un număr algebric; și dacă π ar fi rădăcina unei ecuații algebrice, pentru ce vreți ca această rădăcină să fie o perioadă a funcției $\sin 2x$ și să nu fie la fel cu celelalte rădăcini ale acestei ecuații?" Pe scurt, ei ar fi invocat principiul rațiunii suficiente sub forma sa cea mai vagă.

Dar ce puteau ei să obțină de aici? Cel mult o regulă de conduită pentru folosirea timpului lor, mai util cheltuit cu lucrările lor obișnuite decît cu lectura unei elucubrații, care le inspiră o legi-

timă neîncredere. Dar ceea ce numeam mai sus probabilitate obiectivă nu are nici o legătură cu această primă problemă.

Altfel se întîmplă cu a doua problemă.

Să considerăm primii 10 000 de logaritmi pe care îi găsim într-o tabelă. Dintre aceşti 10 000 de logaritmi, iau unul la întîmplare; care este probabilitatea ca a treia zecimală a sa să fie un număr par? Nu veţi ezita să răspundeţi $\frac{1}{2}$, şi, într-adevăr, dacă veţi nota într-o tabelă zecimala a treia a acestor 10 000 de numere, veţi găsi aproape tot atîtea cifre pare cîte cifre impare.

Sau, dacă se preferă, să scriem 10 000 de numere corespunzînd celor 10 000 de logaritmi ai noştri; fiecare dintre aceste numere fiind egal cu $+1$ dacă a treia zecimală a logaritmului corespunzător este cifră pară, şi cu -1 în cazul contrar. Să facem apoi media acestor 10 000 de numere.

Voi susţine că media acestor 10 000 de numere este probabil nulă, iar dacă aş calcula-o efectiv, aş verifica faptul că ea este foarte mică.

Dar însăşi această verificare este inutilă. Aş fi putut demonstra în mod riguros că această medie este mai mică decît 0,003. Pentru a stabili acest rezultat, mi-ar fi trebuit un calcul destul de lung, care nu şi-ar fi putut găsi locul aici şi relativ la care mă mulţumesc să trimit cititorul la un articol pe care l-am publicat în „Revue générale des Sciences", din 15 aprilie 1899. Singurul punct asupra căruia trebuie să atrag atenţia este următorul: în acest calcul nu aş fi avut nevoie decît să mă sprijin pe două fapte, anume că derivatele prima şi a doua ale logaritmului rămîn, în intervalul considerat, cuprinse între anumite limite.

De unde această primă consecinţă că proprietatea este adevărată nu numai pentru logaritm, ci şi pentru o funcţie continuă oarecare, pentru că derivatele oricărei funcţii continui sînt limitate.

Dacă eram dinainte sigur de rezultat, aceasta e, în primul rînd, pentru că am observat adeseori fapte analoage la alte funcții continui; apoi, pentru că, în forul meu interior, într-un mod mai mult sau mai puțin inconștient și imperfect, făceam raționamentul ce m-a condus la inegalitățile precedente ca un calculator exersat care, înainte de a termina o multiplicare, își dă seama că „aceasta are să facă aproape atît"

Și, de altfel, întrucît ceea ce denumeam intuiție a mea nu era decît o vedere de ansamblu incompletă a unui raționament veritabil, se explică faptul că observația a menținut previziunile mele, că probabilitatea obiectivă a fost de acord cu probabilitatea subiectivă.

Ca un al treilea exemplu voi alege problema următoare: un număr u este luat la întîmplare, n este un număr întreg dat foarte mare; care este valoarea probabilă a lui $\sin nu$? Această problemă nu are nici un sens prin ea însăși. Pentru a-i da unul, trebuie o convenție; *vom conveni* că probabilitatea ca numărul u să fie cuprins între a și $a + da$ este egală cu $\varphi(a)\,da$; că ea este, prin urmare, proporțională cu întinderea intervalului infinit de mic da și egală cu această întindere multiplicată cu o funcție $\varphi(a)$ care nu depinde decît de a. În ceea ce privește această funcție, eu o aleg în mod arbitrar, dar trebuie neapărat să o presupun continuă. Valoarea lui $\sin nu$ rămînînd aceeași cînd u crește cu 2π, eu pot, fără să restrîng generalitatea, să presupun că u este cuprins între 0 și 2π și voi fi astfel condus să presupun că $\varphi(a)$ este o funcție periodică a cărei perioadă este 2π.

Valoarea probabilă căutată se exprimă cu ușurință printr-o integrală simplă și este lesne de arătat că această integrală este mai mică decît

$$\frac{2\pi M^k}{n^k},$$

M^k fiind cea mai mare valoare a derivatei k a lui $\varphi(u)$. Deci, se vede că, dacă derivata k este finită, valoarea noastră probabilă va tinde spre zero cînd n va crește în mod indefinit și aceasta mai repede decît $\frac{1}{n^{k-1}}$.

Valoarea probabilă a lui sin *nu* pentru n foarte mare este deci nulă; pentru a defini această valoare, am avut nevoie de o convenție; dar rezultatul rămîne același, *oricare ar fi această convenție*. Nu mi-am impus decît restricții slabe, presupunînd că funcția $\varphi(a)$ este continuă și periodică, iar aceste ipoteze sînt atît de naturale, încît se pune întrebarea cum s-ar putea să li te sustragi.

Examinarea celor trei exemple precedente, atît de diferite în toate privințele, ne-a făcut să întrevedem deja, pe de o parte, rolul a ceea ce filosofii numesc principiul rațiunii suficiente, și, pe de altă parte, importanța faptului că anumite proprietăți sînt comune tuturor funcțiilor continui. Studiul probabilității în științele fizice ne va conduce la același rezultat.

III. — **Probabilitatea în științele fizice.** — Ajungem acum la problemele care se referă la ceea ce am numit mai sus al doilea grad de ignoranță; sînt cele în care se cunoaște legea, dar în care se ignoră starea inițială a sistemului. Aș putea da multe exemple, dar nu voi lua decît unul: Care este distribuția actuală probabilă a micilor planete pe zodiac?

Noi știm că aceste planete se supun legilor lui Kepler; putem chiar, fără a schimba nimic din natura problemei, să presupunem că orbitele lor sînt toate circulare și situate într-un același plan pe care îl știm. În schimb, ignorăm cu totul distribuția lor inițială. Totuși, noi afirmăm că astăzi această distribuție este aproape uniformă. De ce?

Fie b longitudinea unei planete mici la momentul inițial, adică la momentul zero; fie a mișcarea sa medie; longitudinea sa în momentul actual, adică la momentul t, va fi $at + b$. A spune că distribuția actuală este uniformă, înseamnă a spune că valoarea medie a sinusurilor și a cosinusurilor multiplilor lui $at + b$ este nulă. Pentru ce afirmăm aceasta?

Să reprezentăm fiecare planetă mică printr-un punct dintr-un plan, anume prin punctul ale cărui coordonate sînt tocmai a și b. Toate punctele reprezentative vor fi conținute într-o anumită regiune a planului, dar cum ele sînt foarte numeroase, această regiune va apărea ciuruită de puncte. Despre distribuția acestor puncte noi nu știm nimic.

Ce facem cînd vrem să aplicăm calculul probabilităților unei probleme similare? Care este probabilitatea ca unul sau mai multe puncte reprezentative să se găsească într-o anumită parte a planului? În ignoranța noastră, sîntem constrînși să facem o ipoteză arbitrară. Pentru a explica natura acestei ipoteze, să mi se permită să folosesc, în locul unei formule matematice, o imagine grosieră, dar concretă. Să ne imaginăm că a fost răspîndită pe suprafața planului nostru o materie fictivă a cărei densitate este variabilă, dar care variază într-un mod continuu. Vom conveni atunci să spunem că numărul probabil de puncte reprezentative care se găsesc pe o parte a planului este proporțional cu cantitatea de materie fictivă care se găsește aici. Acum, dacă avem două regiuni ale planului de aceeași întindere, probabilitățile ca un punct reprezentativ al uneia dintre micile noastre planete să se găsească în una sau în cealaltă din aceste regiuni vor fi între ele ca densitățile medii ale materiei fictive în una și în cealaltă regiune.

Iată deci două distribuții, una reală, în care punctele reprezentative sînt foarte numeroase,

foarte înghesuite, dar discrete ca moleculele materiei în ipoteza atomică; cealaltă, îndepărtată de realitate, în care punctele noastre reprezentative sînt înlocuite printr-o materie fictivă continuă. Despre aceasta din urmă noi știm că nu poate fi reală, dar ignoranța noastră nu ne lasă să o adoptăm.

Dacă cel puțin am avea vreo idee despre distribuția reală a punctelor reprezentative, am putea lua măsuri ca, într-o regiune de o oarecare întindere, densitatea acestei materii fictive continui să fie aproape proporțională cu numărul de puncte reprezentative, sau, dacă vrem, cu numărul atomilor care sînt conținuți în această regiune. Acest lucru nu e cu neputință, iar ignoranța noastră este atît de mare, încît sîntem forțați să alegem în mod arbitrar funcția care definește densitatea materiei noastre fictive. Vom fi constrînși numai la o ipoteză de la care n-avem cum să ne sustragem în nici un fel: vom presupune că această funcție este continuă. Aceasta ne este de ajuns, după cum vom vedea, pentru a ne permite o concluzie.

Care este în momentul t distribuția probabilă a micilor planete? Sau, care este valoarea probabilă a sinusului longitudinii, în momentul t, adică a lui $\sin(at + b)$? Noi am făcut la început o convenție arbitrară, dar, dacă o adoptăm, această valoare probabilă este definită în întregime. Să descompunem planul în elemente de suprafață. Să considerăm valoarea lui $\sin(at + b)$ în centrul fiecăruia dintre aceste elemente; să multiplicăm această valoare cu suprafața elementului și cu densitatea corespunzătoare a materiei fictive; să facem apoi suma tuturor elementelor planului. Această sumă va fi, prin definiție, valoarea medie probabilă căutată, care va fi astfel exprimată printr-o integrală dublă.

Se poate crede mai întîi că această valoare medie va depinde de alegerea funcției φ care

definește densitatea materiei fictive și că, dat fiind că această funcție φ este arbitrară, vom putea obține, după alegerea arbitrară pe care o vom face, o valoare medie oarecare. Nu este exact!

Un calcul simplu arată că integrala noastră dublă descrește foarte repede cînd t se mărește.

Astfel, nu prea știam ce ipoteză să fac privitor la probabilitatea cutărei sau cutărei distribuții inițiale; dar, oricare ar fi ipoteza făcută, rezultatul va fi același, și aceasta mă scoate din încurcătură.

Oricare ar fi funcția φ, valoarea medie tinde către zero cînd t crește, și cum micile planete au efectuat cu siguranță un foarte mare număr de revoluții, pot să afirm că această valoare medie este foarte mică.

Pot să aleg pe φ cum vreau, cu rezerva unei restricții, totuși: această funcție trebuie să fie continuă; și, într-adevăr, din punctul de vedere al probabilității subiective, alegerea unei funcții discontinui ar fi fost lipsită de rațiune; ce rațiune aș putea avea, de exemplu, să presupun că longitudinea inițială poate fi egală cu 0° precis, dar că ea nu poate fi cuprinsă între 0° și 1°?

Însă dificultatea reapare dacă ne plasăm în punctul de vedere al probabilității obiective; dacă se trece de la distribuția noastră, imaginară, în care materia fictivă era presupusă continuă, la distribuția reală în care punctele noastre reprezentative iau un aspect asemănător cu cel al atomilor discreți.

Valoarea medie a lui $\sin(at + b)$ va fi reprezentată simplu prin:

$$\frac{1}{n} \Sigma \sin(at + b),$$

n fiind numărul micilor planete. În loc de o integrală dublă avînd ca obiect o funcție continuă,

avem o sumă de termeni discreți. Și totuși nimeni nu se va îndoi în mod serios că această valoare medie nu este efectiv foarte mică.

Punctele noastre reprezentative fiind foarte strînse, suma noastră discretă va diferi în general foarte puțin de o integrală.

O integrală este limita spre care tinde o sumă de termeni cînd numărul acestor termeni crește în mod indefinit. Dacă termenii sînt foarte numeroși, suma va diferi foarte puțin de limita sa, adică de integrală, și ceea ce am spus despre aceasta din urmă va fi adevărat și despre sumă însăși.

Există totuși cazuri care prezintă excepții. Dacă, de exemplu, am avea pentru toate micile planete:

$$b = \frac{\pi}{2} - at,$$

toate planetele în momentul t ar avea ca longitudine $\frac{\pi}{2}$ și valoarea medie ar fi, evident, egală cu 1. Pentru aceasta, ar trebui ca la momentul 0, micile planete să fi fost toate plasate pe un fel de spirală avînd o formă deosebită, cu spire extrem de strînse. Toată lumea va considera că o asemenea distribuție inițială este extrem de improbabilă (și, chiar presupunînd-o realizată, distribuția nu ar fi uniformă în momentul actual, de exemplu la 1 ianuarie 1900, dar ea ar redeveni astfel cîțiva ani mai tîrziu).

Totuși, de ce considerăm noi această distribuție inițială ca improbabilă? Este necesar să o explicăm, întrucît, dacă nu am avea vreun motiv să respingem ca neverosimilă această ipoteză absurdă, totul s-ar prăbuși, iar noi n-am mai putea să afirmăm nimic cu privire la probabilitatea cutărei sau cutărei distribuții actuale.

Ceea ce vom invoca este din nou principiul rațiunii suficiente, la care trebuie să ne reîn-

toarcem totdeauna. Am putea admite că, la origine, planetele erau distribuite aproape în linie dreaptă; am putea admite că ele erau distribuite în mod neregulat; dar ni se pare că nu există o raţiune suficientă pentru ca necunoscuta cauză care le-a dat naştere să fi acţionat după o curbă atît de regulată şi totuşi atît de complicată, şi care ar părea că a fost aleasă în mod expres tocmai pentru ca distribuţia actuală să nu fie uniformă.

IV. — **Roşu şi Negru.** — Chestiunile ridicate de jocurile de noroc, ca, de pildă, jocul la ruletă, sînt, în fond, cu totul analoage cu cele pe care le-am discutat pînă aici.

De exemplu, un cadran este împărţit într-un mare număr de subdiviziuni egale, alternativ roşii şi negre; se lansează cu forţă un ac indicator, iar acesta, după ce a parcurs un mare număr de rotiri, se opreşte în faţa uneia din aceste subdiviziuni. Probabilitatea ca această subdiviziune să fie roşie este evident $\frac{1}{2}$.

Acul se va roti cu un unghi θ, cuprinzînd mai multe circumferinţe; nu cunosc care este probabilitatea ca acul să fie lansat cu o forţă astfel încît acest unghi să fie cuprins între θ şi $\theta + d\theta$; însă, eu pot să fac o convenţie; pot să presupun că această probabilitate este $\varphi(\theta)\, d\theta$; în ceea ce priveşte funcţia $\varphi(\theta)$, pot s-o aleg într-un mod cu totul arbitrar; nu există nimic care să mă poată călăuzi în alegerea mea; totuşi, eu sînt determinat în mod firesc să presupun această funcţie continuă.

Fie ε lungimea (măsurată pe circumferinţa cu raza 1) a fiecărei subdiviziuni roşii sau negre.

Trebuie să calculăm integrala lui $\varphi(\theta)d\theta$ extinzînd-o, pe de o parte, la toate diviziunile roşii, iar pe de altă parte, la toate diviziunile negre, şi să comparăm rezultatele.

Să considerăm un interval 2ε, cuprinzînd o diviziune roşie şi diviziunea neagră care îi urmează.

Fie M și m, cea mai mare și cea mai mică valoare a funcției $\varphi(\theta)$ în acest interval. Integrala extinsă la diviziunile roșii va fi mai mică decît $\Sigma M\varepsilon$; integrala extinsă la diviziunile negre va fi mai mare decît $\Sigma m\varepsilon$; diferența va fi deci mai mică decît $\Sigma(M-m)\varepsilon$. Dar, dacă funcția φ este presupusă continuă; dacă, pe de altă parte, intervalul ε este foarte mic în raport cu unghiul total parcurs de ac, diferența $M-m$ va fi foarte mică. Diferența dintre cele două integrale va fi deci foarte mică, iar probabilitatea va fi foarte aproape de 1/2.

Se înțelege că, fără a ști nimic despre funcția φ, eu trebuie să acționez ca și cum probabilitatea ar fi $\frac{1}{2}$. Se explică, pe de altă parte, pentru ce, dacă, plasîndu-mă în punctul de vedere obiectiv, observ un anumit număr de trageri, observația îmi va furniza aproape tot atîtea trageri negre cît și roșii.

Toți jucătorii cunosc această lege obiectivă; dar ea îi tîrăște într-o eroare bizară, care a fost relevată adeseori, și în care cad totdeauna din nou. Cînd a ieșit roș, de exemplu, de șase ori la rînd, ei mizează pe negru, crezînd că joacă la sigur; pentru că, spun ei, se întîmplă foarte rar ca roșul să iasă de șapte ori la rînd.

În realitate, probabilitatea lor de cîștig rămîne $\frac{1}{2}$. Observația arată, este adevărat, că seriile de șapte lovituri roșii consecutive sînt foarte rare; dar, seriile de șase lovituri roșii urmate de una neagră sînt tot atît de rare. Ei au remarcat raritatea seriilor de șapte lovituri roșii; dacă nu au remarcat raritatea seriilor de șase lovituri roșii urmate de una neagră, aceasta se datorește doar faptului că asemenea serii frapează mai puțin atenția.

V. — **Probabilitatea cauzelor.** — Am ajuns la problemele de probabilitate a cauzelor, cele mai

importante din punctul de vedere al aplicațiilor științifice. Două stele, de exemplu, sînt foarte apropiate pe sfera cerească; această apropiere aparentă este oare un efect exclusiv al hazardului, și aceste stele, deși aproape pe aceeași rază vizuală, sînt ele plasate la distanțe foarte diferite de Terra și, prin urmare, foarte îndepărtate una de alta? Sau corespunde ea unei apropieri reale? Avem aici o problemă de probabilitate a cauzelor.

Reamintesc mai întîi că la începutul tuturor problemelor de probabilitate a efectelor care ne-au preocupat pînă aici a trebuit să stabilim totdeauna o convenție mai mult sau mai puțin justificată. Și dacă, de cele mai multe ori, rezultatul era, într-o anumită măsură, independent de această convenție, aceasta nu se întîmpla decît cu condiția anumitor ipoteze, care ne permiteau să respingem *a priori* funcțiile discontinui, de exemplu, sau anumite convenții absurde.

Vom regăsi ceva analog acum, cînd ne ocupăm de probabilitatea cauzelor. Un efect poate fi produs de cauza A sau de cauza B. Efectul tocmai a fost observat; se cere probabilitatea ca el să fie datorat cauzei A, este probabilitatea cauzei *a posteriori*. Dar eu nu aș putea s-o calculez dacă o convenție mai mult sau mai puțin justificată nu m-ar face să cunosc *dinainte* care este probabilitatea *a priori* pentru ca să intre în acțiune cauza A; vreau să spun, probabilitatea acestui eveniment, pentru cineva care nu ar fi observat încă efectul.

Pentru a mă explica mai bine, revin la exemplul jocului de *écarté*, citat mai sus; adversarul meu dă carte pentru prima oară și scoate riga; care este probabilitatea ca el să fie un trișor? Formulele indicate în mod obișnuit dau $\frac{8}{9}$, rezultat evident foarte surprinzător. Dacă le examinăm mai de aproape, se vede că se efectuează calculul ca și cum, *înainte de a ne așeza la masa de joc*, aș fi

considerat că exista o șansă din două ca adversarul meu să nu fie cinstit. Ipoteză absurdă, pentru că, în acest caz, cu siguranță că nu aș fi jucat cu el; ceea ce explică și absurditatea concluziei.

Convenția asupra probabilității *a priori* era nejustificată; de aceea calculul probabilității *a posteriori* mă condusese la un rezultat inadmisibil. Se vede importanța acestei convenții prealabile; voi adăuga chiar că, dacă nu s-ar fi făcut nici una, problema probabilității *a posteriori* nu ar avea nici un sens; trebuie să o facem totdeauna, fie explicit, fie tacit.

Să trecem la un exemplu cu un caracter mai științific. Vreau să determin o lege experimentală; această lege, cînd o voi cunoaște, va putea fi reprezentată printr-o curbă; fac un anumit număr de observații izolate; fiecare dintre ele va fi reprezentată printr-un punct. Cînd am obținut aceste diferite puncte, duc o curbă printre aceste puncte, străduindu-mă să mă depărtez de ele cît mai puțin posibil și, totuși, să păstrez curbei mele o formă regulată, fără puncte în unghi, fără inflexiuni prea accentuate, fără o variație bruscă a razei de curbură. Această curbă îmi va reprezenta legea probabilă și admit nu numai că ea mă face să cunosc valorile funcției intermediare între acelea care au fost observate, dar, mai mult, că ea mă face să cunosc înseși valorile observate, mai exact decît observația directă (de aceea eu duc curba aproape de punctele mele și nu prin înseși aceste puncte).

Avem aici o problemă de probabilitate a cauzelor. Efectele sînt măsurătorile pe care le-am înregistrat; ele depind de combinarea a două cauze: legea veritabilă a fenomenului și erorile de observații. Este vorba, cunoscînd efectele, să căutăm probabilitatea ca fenomenul să se supună cutărei legi și ca observațiile să fi fost afectate de cutare eroare. Legea cea mai probabilă corespunde atunci curbei trasate, iar eroarea cea mai

probabilă a unei observații este reprezentată prin distanța de la punctul corespunzător la această curbă.

Dar problema nu ar avea nici un sens dacă, mai înainte de orice observație, nu mi-aș fi făcut o idee *a priori* despre probabilitatea cutării sau cutării legi și despre șansele de eroare la care sînt expus.

Dacă instrumentele mele sînt bune (și aceasta o știu înainte de a observa), nu voi permite curbei mele să se îndepărteze mult de punctele care reprezintă măsurătorile brute. Dacă ele sînt proaste, voi putea să mă îndepărtez ceva mai mult, pentru a obține o curbă mai puțin sinuoasă; voi sacrifica mai mult regularității.

Așadar, pentru ce caut eu să trasez o curbă fără sinuozități? Pentru că eu consider *a priori* o lege reprezentată printr-o funcție continuă (sau printr-o funcție ale cărei derivate de ordin ridicat sînt mici) ca mai probabilă decît o lege care nu satisface aceste condiții. Fără această credință, problema de care vorbeam nu ar avea nici un sens; interpolarea ar fi imposibilă; nu s-ar putea deduce o lege dintr-un număr finit de observații; știința nu ar exista.

Acum cincizeci de ani, fizicienii considerau o lege simplă ca mai probabilă decît o lege complicată. Ei invocau chiar acest principiu în favoarea legii lui Mariotte și împotriva experiențelor lui Regnault. Astăzi, ei nu mai au această credință; de cîte ori nu sînt ei, totuși, obligați să acționeze ca și cum ar fi păstrat-o! Oricum, ceea ce rămîne din această tendință este credința în continuitate, și am văzut mai sus că, dacă această credință ar dispărea la rîndul ei, știința experimentală ar deveni imposibilă.

VI. — **Teoria erorilor.** — Ajungem astfel să vorbim despre teoria erorilor, care se leagă direct de problema probabilității cauzelor. Și aici con-

statăm *efecte*, adică un anumit număr de observații discordante, căutînd apoi să ghicim *cauzele*, care sînt, pe de o parte, valoarea veritabilă a cantității de măsurat, iar pe de altă parte, eroarea comisă în fiecare observație. Ar trebui să calculăm care este *a posteriori* mărimea probabilă a fiecărei erori și, prin urmare, valoarea probabilă a cantității de măsurat.

Dar, așa cum am explicat mai sus, nu s-ar putea întreprinde acest calcul dacă nu s-ar admite *a priori*, adică mai înainte de orice observație, o lege de probabilitate a erorilor. Există o lege a erorilor?

Legea erorilor admisă de toți calculatorii este legea lui Gauss, care este reprezentată printr-o anumită curbă transcendentă, cunoscută sub numele de „curba în formă de clopot"

Dar mai întîi este cazul să reamintim distincția clasică dintre erorile sistematice și cele accidentale. Dacă măsurăm o lungime cu un metru prea lung, vom găsi totdeauna un număr prea mic și nu va folosi la nimic să reluăm măsurătoarea de mai multe ori; avem aici o eroare sistematică. Dacă o măsurăm cu un metru exact, s-ar putea ca și în acest caz să ne înșelăm, dar ne vom înșela cînd în plus, cînd în minus, iar cînd vom face media unui mare număr de măsurători, eroarea va tinde să se atenueze. Acestea sînt erori accidentale.

Este evident mai întîi că erorile sistematice nu pot satisface legea lui Gauss; dar erorile accidentale o satisfac? S-a încercat un mare număr de demonstrații; aproape toate sînt paralogisme grosiere. Se poate totuși demonstra legea lui Gauss plecînd de la ipotezele următoare: eroarea comisă este rezultanta unui foarte mare număr de erori parțiale și independente; fiecare dintre erorile parțiale este foarte mică și se supune unei legi de probabilitate oarecare, afară numai de cazul în care probabilitatea unei erori

pozitive nu este aceeași ca probabilitatea unei erori egale și de semn contrar. Este evident că aceste condiții vor fi îndeplinite adeseori, dar nu totdeauna, iar noi vom putea rezerva denumirea de accidentale erorilor care satisfac aceste condiții.

Se vede că metoda celor mai mici pătrate nu este legitimă în toate cazurile; în general, fizicienii își exprimă mai mult neîncrederea în ea decît astronomii. Aceasta, fără îndoială, se datorește faptului că ultimii, în afară de erorile sistematice pe care le întîlnesc ca și fizicienii, au de luptat cu o cauză de eroare extrem de importantă și care este cu totul accidentală — ondulațiile atmosferice. De aceea este foarte bizar să auzi pe un fizician discutînd cu un astronom despre o metodă de observație: fizicianul, convins că o măsură bună prețuiește mai mult decît multe proaste, se preocupă mai înainte de orice să elimine, după multe precauții, ultimele erori sistematice, iar astronomul răspunzîndu-i: „Dar nu veți putea observa astfel decît un mic număr de stele; erorile accidentale nu vor dispărea"

Ce trebuie să conchidem? Trebuie să continuăm să aplicăm metoda celor mai mici pătrate? Trebuie să ne fie clar: am eliminat toate erorile sistematice pe care le-am putut bănui; știm bine că mai sînt și altele, dar nu putem să le descoperim; totuși, trebuie să luăm o hotărîre și să adoptăm o valoare definitivă, care va fi considerată ca valoarea probabilă; în acest scop, este evident, ceea ce avem mai bun de făcut este să aplicăm metoda lui Gauss. Noi nu am făcut decît să aplicăm o regulă practică ce se referă la probabilitatea subiectivă. Nu e nimic de spus aici.

Dar se intenționează să se meargă mai departe și să se afirme că nu numai valoarea probabilă este de atît, dar și că eroarea probabilă comisă privind rezultatul este de atît. *Aceasta*

este absolut ilegitim; aşa ceva nu ar fi adevărat decît dacă am fi siguri că toate erorile sistematice sînt eliminate, iar noi nu ştim absolut nimic în această privinţă. Avem două serii de observaţii; aplicînd regula celor mai mici pătrate, găsim că eroarea probabilă privitoare la prima serie este de două ori mai mică decît cea privitoare la a doua. Seria a doua poate fi totuşi mai bună decît prima, pentru că prima s-ar putea să fie afectată de o mare eroare sistematică. Tot ceea ce putem spune este că prima serie este *probabil* mai bună decît a doua, pentru că eroarea sa accidentală este mai mică, şi pentru că nu avem nici un motiv să afirmăm că eroarea sistematică este mai mare pentru una din serii decît pentru cealaltă, lipsa noastră de cunoaştere în această privinţă fiind absolută.

VII. — **Concluzii.** — Pînă aici am ridicat multe probleme fără să rezolv nici una. Nu regret totuşi de a le fi consemnat, întrucît ele îl vor invita poate pe cititor să reflecteze asupra acestor chestiuni delicate.

Oricum, există anumite puncte care par bine stabilite. Pentru a întreprinde un calcul oarecare de probabilitate şi pentru ca acest calcul să aibă un sens trebuie să se admită, ca punct de plecare, o ipoteză sau o convenţie care comportă totdeauna un anumit grad de arbitrar. În alegerea acestei convenţii nu putem fi călăuziţi decît de principiul raţiunii suficiente. Din nefericire, acest principiu este vag şi elastic şi, în examenul rapid pe care l-am făcut, l-am văzut luînd multe forme diferite. Forma sub care l-am întîlnit cel mai frecvent este credinţa în continuitate, credinţă greu de justificat printr-un raţionament apodictic, dar fără care orice ştiinţă ar fi imposibilă. În sfîrşit, problemele în care calculul probabilităţilor poate fi aplicat cu folos sînt acelea în care rezultatul este independent

de ipoteza făcută la început, trebuind numai ca această ipoteză să satisfacă condiția de continuitate.

Capitolul XII

Optica și electricitatea

Teoria lui Fresnel. — Cel mai bun exemplu [5] pe care îl putem alege este teoria luminii și raporturile sale cu teoria electricității. Datorită lui Fresnel, optica este partea cea mai avansată a fizicii; teoria zisă a ondulațiilor formează un ansamblu cu adevărat satisfăcător pentru spirit; dar nu trebuie să-i cerem ceea ce ea nu poate să ne dea.

Teoriile matematice nu au ca obiect să ne dezvăluie veritabila natură a lucrurilor; aceasta ar fi o pretenție nerațională. Scopul lor unic este de a coordona legile fizice pe care experiența ne face să le cunoaștem, dar pe care, fără ajutorul matematicilor, nu am putea nici măcar să le enunțăm.

Puțin ne interesează dacă eterul există realmente, aceasta este treaba metafizicienilor; esențialul pentru noi este că totul se petrece ca și cum ar exista și că această ipoteză este comodă pentru explicarea fenomenelor. La urma urmelor, avem noi altă rațiune de a crede în existența obiectelor materiale? Nu avem nici aici decît o ipoteză comodă; numai că ea nu va înceta niciodată să fie astfel, în timp ce, fără îndoială, va veni o zi în care eterul va fi respins ca inutil.

Dar chiar în acea zi, legile opticii și ecuațiile care le traduc analitic vor rămîne adevărate,

[5] Acest capitol este reproducerea parțială a prefețelor a două dintre lucrările mele: *Théorie mathématique de la lumière* (Teoria matematică a luminii) (Paris, Naud, 1899) și *Electricité et optique* (Electricitate și optică) (Paris, Naud, 1901).

cel puțin ca primă aproximație. Va fi, așadar, totdeauna util să se studieze o doctrină care leagă între ele toate aceste ecuații.

Teoria ondulațiilor se întemeiază pe o ipoteză moleculară; pentru unii, care cred că descoperă astfel cauza cu ajutorul legii, este un avantaj; pentru ceilalți este un motiv de neîncredere; dar această neîncredere îmi pare tot atît de puțin justificată ca și iluzia primilor.

Aceste ipoteze nu joacă decît un rol secundar. Ar fi posibil să se renunțe la ele; nu se face de obicei acest lucru întrucît expunerea ar pierde în claritate; acesta este singurul motiv.

Într-adevăr, dacă am privi mai de aproape, am vedea că de la ipotezele moleculare nu se iau decît două lucruri: principiul conservării energiei și forma liniară a ecuațiilor, care este legea generală a micilor mișcări, ca și a tuturor micilor variații.

Ceea ce explică pentru ce majoritatea concluziilor lui Fresnel subzistă neschimbate atunci cînd se adoptă teoria electromagnetică a luminii.

Teoria lui Maxwell. — Se știe, Maxwell este cel care a unit printr-o legătură strînsă două părți ale fizicii, pînă atunci complet străine una de alta, optica și electricitatea. Integrată astfel într-un ansamblu mai vast, într-o armonie superioară, optica lui Fresnel nu a încetat să fie vie. Diversele sale părți subzistă, iar raporturile dintre ele au rămas aceleași. Numai limbajul de care ne folosim pentru a le exprima s-a schimbat și, pe de altă parte, Maxwell ne-a revelat alte raporturi, pînă la el nebănuite, între diferitele părți ale opticii și domeniul electricității.

Prima dată cînd un cititor francez deschide cartea lui Maxwell, un sentiment de neliniște și chiar de neîncredere însoțește admirația pentru ea. Doar după un contact prelungit și cu prețul multor eforturi se risipește acest sentiment. Unele spirite eminente rămîn însă cu el permanent.

De ce prind atît de greu la noi ideile savantului englez? Fără îndoială, pentru că educația primită de cei mai mulți dintre francezii luminați îi predispune să aprecieze precizia și logica înaintea oricăror alte calități.

Vechile teorii ale fizicii matematice ne dădeau în această privință o satisfacție completă. Toți maeștrii noștri, de la Laplace pînă la Cauchy, au procedat în același mod. Pornind de la ipoteze enunțate în mod clar, ei au dedus din ele toate consecințele cu rigoare matematică și le-au comparat apoi cu experiența. Ei lasă impresia că vor să dea fiecărcia dintre ramurile fizicii aceeași precizie ca și mecanicii cerești.

Pentru un spirit obișnuit să admire atari modele, o teorie este cu greu satisfăcătoare. Nu numai că el nu va tolera aici nici cea mai mică aparență de contradicție, dar el va pretinde ca diversele părți să fie legate în mod logic unele cu altele și ca numărul ipotezelor distincte să fie redus la minimum.

Și aceasta nu este totul, el va avea și alte exigențe, care mi se par mai puțin rezonabile. Înapoia materiei pe care o ating simțurile noastre și pe care experiența ne-o dezvăluie, el va vrea să vadă o altă materie, singura adevărată după el, care nu va mai avea decît calități pur geometrice și ai cărei atomi nu vor mai fi decît puncte matematice supuse singurelor legi ale dinamicii. Și totuși el va căuta, printr-o inconștientă contradicție, să-și reprezinte acești atomi invizibili și fără culoare și, ca urmare, să-i apropie cît mai mult cu putință de materia vulgară.

Numai atunci el va fi satisfăcut pe deplin și își va imagina că a pătruns secretul universului. Deși această satisfacție este înșelătoare, se renunță greu la ea.

Astfel, deschizînd cartea lui Maxwell, un cititor francez se așteaptă să găsească aici un ansamblu teoretic tot atît de logic și tot atît de precis

ca optica fizică fundată pe ipoteza eterului; el își pregătește astfel o decepție pe care eu aș vrea ca cititorul să o evite, avertizîndu-l cu privire la ceea ce trebuie el să caute la Maxwell și la ceea ce nu ar putea să găsească aici.

Maxwell nu dă o explicație mecanică a electricității și a magnetismului; se mărginește să demonstreze că această explicație este posibilă.

El arată, de asemenea, că fenomenele optice nu sînt decît un caz particular al fenomenelor electromagnetice. Din orice teorie a electricității se va putea deduce, deci, imediat o teorie a luminii.

Reciproca nu este, din nefericire, adevărată; dintr-o explicație completă a luminii nu este totdeauna ușor să obții o explicație completă a fenomenelor electrice. Acest lucru nu este ușor, în special, dacă vrem să plecăm de la teoria lui Fresnel; fără îndoială, aceasta nu ar fi cu neputință; dar ajungi, totuși, să te întrebi dacă nu vei fi forțat să renunți la rezultate admirabile pe care le credeai definitiv cîștigate. Faptul acesta pare un pas înapoi; multe minți luminate nu vor să se resemneze cu o astfel de situație.

Cînd cititorul va fi consimțit să-și limiteze speranțele, el se va izbi și de alte dificultăți; savantul englez nu caută să construiască un edificiu unic, definitiv și bine ordonat, mai degrabă se pare că ridică un mare număr de construcții provizorii și independente, între care comunicațiile sînt dificile și cîteodată imposibile.

Să luăm ca exemplu capitolul în care sînt explicate atracțiile electrostatice prin presiuni și tensiuni care ar exista în mediul dielectric. Acest capitol ar putea fi suprimat fără ca restul cărții să devină din această pricină mai puțin clar și mai puțin complet și, pe de altă parte, el cuprinde o teorie care nu are nevoie de vreun ajutor și pe care am putea să o înțelegem fără să fi citit vreunul din rîndurile care preced sau care urmează.

Dar el nu este independent numai de restul lucrării; este greu să-l conciliezi cu ideile fundamentale ale cărții. Maxwell nici nu încearcă această conciliere, el se mulțumește să spună: „Nu am fost capabil să fac pasul următor, anume, să deduc, prin considerații mecanice, aceste presiuni în dielectric"*.

Acest exemplu ar fi suficient pentru a face înțelese ideile mele; aș putea să citez multe alte exemple în același sens. Astfel, cine ar bănui citind paginile consacrate polarizării rotatorii magnetice că există identitate între fenomenele optice și cele magnetice?

Nu trebuie deci să te mîndrești cu evitarea oricărei contradicții; trebuie să te resemnezi în această privință. Două teorii contradictorii, cu condiția să nu fie amestecate și să nu se caute aici esența lucrurilor, pot fi într-adevăr amîndouă instrumente utile de cercetare, și poate că lectura lui Maxwell ar fi mai puțin sugestivă dacă nu ne-ar fi deschis atîtea căi noi divergente.

Dar ideea fundamentală se găsește astfel puțin mascată, încît, în cele mai multe dintre lucrările de popularizare ea constituie singurul punct care este lăsat complet de o parte.

Cred, așadar, că trebuie, pentru a-i scoate mai bine în relief importanța, să explic în ce constă această idee fundamentală. Dar pentru aceasta este necesară o scurtă digresiune.

Despre explicația mecanică a fenomenelor fizice. — În orice fenomen fizic există un anumit număr de parametri pe care experiența îi poate surprinde în mod direct și pe care ea permite să-i măsurăm. Îi voi numi parametrii q.

Observația ne face apoi să cunoaștem legile variațiilor acestor parametri, care pot fi puse în general sub formă de ecuații diferențiale ce leagă între ei parametrii q și timpul.

---

*) În limba engleză în text (n. trad.)

Ce trebuie făcut pentru a da o interpretare mecanică unui asemenea fenomen?

Se va căuta a-l explica fie prin mișcările materiei obișnuite, fie prin acelea ale unuia sau ale mai multor fluide ipotetice.

Aceste fluide vor fi considerate ca formate dintr-un număr foarte mare de molecule izolate m.

Cînd vom spune atunci că avem o explicație mecanică completă a fenomenului? Cînd, pe de o parte, vom cunoaște ecuațiile diferențiale pe care le satisfac coordonatele acestor molecule ipotetice m, ecuații care de altfel vor trebui să fie conforme cu principiile dinamicii; iar, pe de altă parte, cînd vom cunoaște relațiile care definesc coordonatele moleculelor m în funcție de parametrii q, accesibili experienței.

Aceste ecuații, am spus-o, trebuie să fie conforme cu principiile dinamicii și, în special, cu principiul conservării energiei și cu principiul celei mai mici acțiuni.

Primul dintre aceste două principii ne spune că energia totală este constantă și că ea se divide în două părți:

1. Energia cinetică sau forța vie, care depinde de masele moleculelor ipotetice m și de vitezele lor, pe care o voi denumi T;

2. Și energia potențială, care depinde numai de coordonatele acestor molecule și pe care o voi denumi U. Constantă este *suma* celor două energii T și U.

Ce susține acum principiul celei mai mici acțiuni? El ne informează că, pentru a trece de la situația inițială pe care o ocupă în momentul t_0 la situația finală pe care o ocupă în momentul t_1, sistemul trebuie să apuce un drum astfel încît, în intervalul de timp care se scurge între cele două momente t_0 și t_1, valoarea medie a „acțiunii" (adică a *diferenței* dintre cele două energii T și U) să fie cît mai mică cu putință. Primul dintre

cele două principii este dealtminteri o consecință a celui de-al doilea.

Dacă se cunosc cele două funcții T și U, acest principiu este suficient pentru a determina ecuațiile mișcării.

Printre toate drumurile care permit să se treacă de la o situație la alta, există evident unul pentru care valoarea medie a acțiunii este mai mică decît pentru toate celelalte. Nu există de altfel decît unul, de aici rezultînd că principiul celei mai mici acțiuni este suficient pentru a determina drumul urmat și, prin urmare, ecuațiile mișcării.

Se obțin astfel așa-numitele ecuații ale lui Lagrange.

În aceste ecuații, variabilele independente sînt coordonatele moleculelor ipotetice m; dar presupun acum că se iau ca variabile parametrii q direct accesibili experienței.

Cele două părți ale energiei vor trebui atunci să se exprime în funcție de parametrii q și de derivatele lor; ele vor apărea, evident, experimentatorului sub această formă. Acesta va căuta, în mod firesc, să definească energia potențială și energia cinetică cu ajutorul cantităților pe care el poate să le observe direct [6].

Acestea fiind stabilite, sistemul va trece totdeauna de la o situație la alta pe un drum astfel încît acțiunea medie să fie minimă.

Puțin interesează că T și U sînt exprimați acum cu ajutorul parametrilor q și al derivatelor lor; puțin interesează că noi definim situațiile inițială și finală tot cu ajutorul acestor parametri; principiul celei mai mici acțiuni rămîne totdeauna adevărat.

---

[6] Să adăugăm că U va depinde numai de parametrii q, că T va depinde de parametrii q și de derivatele lor în raport cu timpul și va fi un polinom omogen de gradul al doilea în raport cu aceste derivate.

Or, și aici, dintre toate drumurile care duc de la o situație la alta, există unul pentru care acțiunea medie este minimă și nu există decît unul. Principiul celei mai mici acțiuni este suficient deci pentru a determina ecuațiile diferențiale care definesc variațiile parametrilor q.

Ecuațiile astfel obținute constituie o altă formă a ecuațiilor lui Lagrange.

Pentru a forma aceste ecuații, nu avem nevoie să cunoaștem relațiile care leagă parametrii q cu coordonatele moleculelor ipotetice, nici masele acestor molecule, nici expresia lui U în funcție de coordonatele acestor molecule. Tot ceea ce avem nevoie să cunoaștem este expresia lui U în funcție de parametrii q și aceea a lui T în funcție de parametrii q și de derivatele lor, adică expresiile energiei cinetice și ale energiei potențiale în funcție de datele experimentale.

Atunci din două lucruri unul, sau, pentru o alegere convenabilă a funcțiilor T și U, ecuațiile lui Lagrange, construite așa cum am spus mai sus, vor fi identice cu ecuațiile diferențiale deduse din experiențe; sau nu vor exista funcții T și U, pentru care să aibă loc acest acord. În ultimul caz, este limpede că nu este posibilă nici o explicație mecanică.

Condiția *necesară* pentru ca o explicație mecanică să fie posibilă este, așadar, de a se putea alege funcțiile T și U, astfel încît să satisfacă principiul celei mai mici acțiuni, care atrage după sine pe acela al conservării energiei.

Această condiție este de altfel *suficientă;* într-adevăr, să presupunem că s-a găsit o funcție U de parametrii q, care reprezintă una din părțile energiei, că o altă parte a energiei, pe care o vom reprezenta prin T, este o funcție de parametrii q și de derivatele lor, și că ea este un polinom omogen de gradul al doilea în raport cu aceste derivate; și, în sfîrșit, că ecuațiile lui Lagrange,

formate cu ajutorul acestor două funcții T și U, sînt conforme cu datele experienței.

Cum putem deduce de aici o explicație mecanică? Trebuie ca U să poată fi considerat ca energia potențială a unui sistem, iar T ca forța vie a aceluiași sistem.

Nici o dificultate în ceea ce privește U; dar T, va putea el să fie considerat ca forța vie a unui sistem material?

Este ușor de arătat că aceasta este totdeauna cu putință și chiar într-o infinitate de moduri. Mă voi mărgini să trimit, pentru mai multe detalii, la prefața lucrării mele: *Electricitate și optică*.

Astfel, dacă nu se poate satisface principiul celei mai mici acțiuni, nu există explicație mecanică posibilă; dacă se poate satisface, există nu numai una, ci o infinitate, de unde rezultă că de îndată ce există una, există o infinitate de alte explicații mecanice.

Încă o observație.

Printre cantitățile cu care experiența ne pune în contact direct, vom considera unele ca funcții de coordonatele moleculelor noastre ipotetice; acestea sînt parametrii noștri q; pe celelalte le vom considera ca depinzînd nu numai de coordonate, ci și de viteze, sau, ceea ce înseamnă același lucru, de derivatele parametrilor q, ori drept combinații ale acestor parametri și ale derivatelor lor.

Și atunci se ridică o întrebare: dintre toate aceste cantități măsurate experimental, care sînt acelea pe care le vom alege pentru a reprezenta parametrii q? Care sînt acelea pe care vom prefera să le considerăm ca derivatele acestor parametri? Alegerea rămîne arbitrară într-o foarte mare măsură, dar este suficient să poată fi făcută astfel, încît să rămînă în acord cu principiul celei mai mici acțiuni pentru ca o explicație mecanică să fie posibilă.

Și atunci Maxwell s-a întrebat dacă el putea să facă această alegere și aceea a celor două energii T și U, astfel încît fenomenele electrice să satisfacă acest principiu. Experiența ne arată că energia unui cîmp electromagnetic se descompune în două părți, energia electrostatică și energia electrodinamică. Maxwell a recunoscut că dacă se consideră prima ca reprezentînd energia potențială U, a doua ca reprezentînd energia cinetică T; dacă, pe de altă parte, sarcinile electrostatice ale conductorilor sînt considerate ca parametri q și intensitățile de curenți ca derivatele altor parametri q; în aceste condiții, spun, Maxwell a recunoscut că fenomenele electrice satisfac principiul celei mai mici acțiuni. El era sigur, prin urmare, de posibilitatea unei explicații mecanice.

Dacă Maxwell ar fi expus această idee la începutul cărții sale în loc de a o plasa într-un ungher din volumul al doilea, ea nu ar fi scăpat majorității cititorilor săi.

Așadar, dacă un fenomen comportă o explicație mecanică completă, el va comporta o infinitate de alte explicații mecanice, care vor clarifica, de asemenea, toate particularitățile dezvăluite de experiență.

Acest fapt este confirmat de istoria tuturor ramurilor fizicii; în optică, de exemplu, Fresnel crede că vibrația este perpendiculară pe planul de polarizare; Newmann o consideră ca paralelă cu acest plan. S-a căutat mult timp un „experimentum crucis", care să permită a se decide între aceste două teorii, dar nu a putut fi găsit.

La fel, fără a ieși din domeniul electricității, putem constata că teoria celor două fluide și aceea a fluidului unic explică amîndouă la fel de satisfăcător toate legile observate în electrostatică.

Toate aceste fapte se explică ușor datorită proprietăților ecuațiilor lui Lagrange, pe care le-am reamintit mai sus.

Este lesne de înțeles acum care este ideea fundamentală a lui Maxwell.

Pentru a demonstra posibilitatea unei explicații mecanice a electricității, nu trebuie să ne preocupăm să găsim însăși această explicație, ne este suficient să cunoaștem expresia celor două funcții T și U, care sînt cele două părți ale energiei, să formăm cu aceste două funcții ecuațiile lui Lagrange și să comparăm apoi aceste ecuații cu legile experimentale.

Cum să facem, printre toate aceste explicații posibile, o alegere pentru care ne lipsește ajutorul experienței? Va veni poate o zi în care fizicienii se vor dezinteresa de aceste chestiuni, inaccesibile metodelor pozitive, și le vor abandona metafizicienilor. Această zi nu a sosit însă; omul nu se resemnează atît de ușor să ignore etern fondul lucrurilor.

Alegerea noastră nu poate fi, așadar, călăuzită decît de considerații în care partea aprecierii personale este foarte mare; există totuși soluții pe care toată lumea le va respinge din cauza ciudățeniei lor și altele pe care toată lumea le va prefera din cauza simplității lor.

În ceea ce privește electricitatea și magnetismul, Maxwell se abține să facă vreo alegere. Nu pentru că el nu ia în seamă în mod sistematic tot ceea ce nu pot atinge metodele pozitive; timpul pe care l-a consacrat el teoriei cinetice a gazelor dovedește suficient aceasta. Voi adăuga că dacă, în marea sa operă, nu dezvoltă nici o explicație completă, el încercase anterior să o facă într-un articol apărut în *Philosophical Magazine*. Ciudățenia și complicația ipotezelor pe care el fusese însă obligat să le facă, l-au determinat apoi să renunțe la aceasta.

Același spirit se regăsește în întreaga sa operă. Ce este esențial, adică ceea ce trebuie să rămînă comun tuturor teoriilor, este pus în lumină; tot ceea ce nu ar conveni decît unei teorii particu-

lare este aproape totdeauna trecut sub tăcere. Cititorul se găsește astfel în prezența unei forme aproape vide de materie, pe care este mai întîi tentat să o ia drept o umbră fugitivă și insesizabilă. Dar eforturile la care el este astfel supus îl forțează să reflecteze și sfîrșește prin a înțelege ceea ce era adeseori puțin cam artificial în ansamblurile teoretice pe care le admira altădată.

Capitolul XIII

Electrodinamica

Istoria electrodinamicii este deosebit de instructivă din punctul nostru de vedere.

Ampère și-a intitulat nemuritoarea sa lucrare *Teoria fenomenelor electrodinamice, bazată* **numai** *pe experiență*. El își imagina, așadar, că nu făcuse *nici o* ipoteză; făcuse însă, și acest lucru nu vom întîrzia să-l vedem; numai că el a făcut ipoteze fără să știe.

Cei care au venit după el, din contră, au observat acest lucru, pentru că atenția le-a fost atrasă de punctele slabe ale soluției lui Ampère. Ei au făcut ipoteze noi, de care au fost pe deplin conștienți de data aceasta; dar de cîte ori au fost nevoiți să le schimbe mai înainte de a ajunge la sistemul clasic de astăzi, care poate că nu este încă definitiv; ceea ce vom vedea mai departe.

I. — **Teoria lui Ampère.** — Cînd Ampère a studiat experimental acțiunile reciproce ale curenților, el nu a operat și nu putea să opereze decît cu curenți închiși.

Nu pentru că nega posibilitatea curenților deschiși. Dacă doi conductori sînt încărcați cu electricitate de semn contrar și dacă sînt puși în comunicație printr-un fir, se stabilește un curent care circulă de la unul la altul și care durează pînă cînd cele două potențiale devin egale. După

ideile care dominau în timpul lui Ampère, era vorba aici de un curent deschis; se vedea, într-adevăr, cum curentul merge de la primul conductor la cel de-al doilea, dar nu se vedea cum revine de la cel de-al doilea la primul.

Astfel, Ampère considera ca deschiși curenții de această natură, un exemplu fiind curenții de descărcare ai condensatorilor, dar el nu putea să facă din aceștia obiectul experiențelor sale pentru că durata lor este prea scurtă.

Se poate imagina, de asemenea, un alt fel de curent deschis. Presupun doi conductori, *A* și *B*, legați printr-un fir *AMB*. Mici mase conducătoare aflate în mișcare intră mai întîi în contact cu conductorul *B*, primesc de la el o sarcină electrică, părăsesc contactul cu *B*, se pun în mișcare, urmînd drumul *BNA*, și, transportînd sarcina pe care o au, vin în contact cu *A*, unde se descarcă de sarcină, care revine apoi în *B* urmînd firul *AMB*.

Într-adevăr, aici avem, într-un sens, un circuit închis, pentru că electricitatea descrie circuitul închis *BNAMB*; dar cele două părți ale acestui curent sînt foarte diferite: în firul *AMB* electricitatea se deplasează printr-un conductor fix, în felul unui curent voltaic, înfrîngînd o rezistență ohmică și dezvoltînd căldură; se spune că ea se deplasează *prin conducție*; în partea *BNA*, electricitatea este *transportată* de un conductor mobil; se spune că ea se deplasează *prin convecție*.

Dacă, în acest caz, curentul de convecție este considerat ca fiind complet analog cu curentul de conducție, atunci circuitul *BNAMB* este închis; dacă, din contră, curentul de convecție nu este „un adevărat curent" și, de exemplu, nu acționează asupra magneților, nu mai rămîne decît curentul de conducție *AMB*, care este *deschis*.

De pildă, dacă se unesc printr-un fir cei doi poli ai unei mașini Holtz, platoul turnant încărcat

transportă de la un pol la altul electricitate prin convecție, care revine la primul pol prin conducție prin fir.

Însă, curenți de acest gen sînt foarte greu de realizat cu o intensitate apreciabilă. Cu mijloacele de care dispunea Ampère, se poate spune că acest lucru era cu neputință.

În rezumat, Ampère putea să conceapă existența a două tipuri de curenți deschiși, dar el nu putea să opereze asupra nici unuia dintre aceștia, pentru că ei erau prea intenși sau pentru că durau prea puțin timp.

Experiența nu putea, așadar, să-i arate decît acțiunea unui curent închis asupra unui curent închis, sau, la rigoare, acțiunea unui curent închis asupra unei porțiuni de curent, întrucît se poate face ca un curent să parcurgă un circuit *închis* compus dintr-o parte mobilă și dintr-o parte fixă. Se pot studia atunci deplasările părții mobile sub acțiunea unui alt curent închis.

În schimb, Ampère nu avea nici un mijloc de a studia acțiunea unui curent deschis, fie asupra unui curent închis, fie asupra unui alt curent deschis.

1. **Cazul curenților închiși.** — În cazul acțiunii dintre doi curenți închiși, experiența i-a revelat lui Ampère legi deosebit de simple.

Voi reaminti aici în mod rapid pe acelea care ne vor fi utile în continuare.

1. *Dacă intensitatea curenților este menținută constantă* și dacă cele două circuite, după ce au suferit deplasări și deformări oarecari, revin în final la pozițiile lor inițiale, lucrul mecanic total al acțiunilor electrodinamice va fi nul.

Cu alte cuvinte, există un *potențial electrodinamic* al celor două circuite proporțional cu produsul intensităților și care depinde de forma și de poziția relativă a circuitelor; lucrul mecanic al acțiunilor electrodinamice este egal cu variația acestui potențial;

2. Acțiunea unui solenoid închis este nulă;

3. Acțiunea unui circuit C asupra unui alt circuit voltaic C' nu depinde decît de „cîmpul magnetic" dezvoltat de acest circuit C. În fiecare punct al spațiului, se poate defini, într-adevăr, în mărime și direcție, o anumită forță denumită *forță magnetică* și care se bucură de proprietățile următoare:

a) Forța exercitată de C asupra unui pol magnetic este aplicată asupra acestui pol; ea este egală cu forța magnetică multiplicată cu masa magnetică a polului;

b) Un ac foarte scurt magnetizat tinde să ia direcția forței magnetice, iar cuplul care tinde să-l readucă în starea inițială este proporțional cu produsul dintre forța magnetică, momentul magnetic al acului și sinusul unghiului de variație;

c) Dacă circuitul C' se deplasează, lucrul mecanic al acțiunii electrodinamice exercitate de C asupra lui C' va fi egal cu creșterea „fluxului de forță magnetică" ce traversează acest circuit.

2. Acțiunea unui curent închis asupra unei porțiuni de curent. — Ampère, neputînd să realizeze un curent deschis propriu-zis, nu avea decît un mijloc pentru a studia acțiunea unui curent închis asupra unei porțiuni de curent.

Era acela de a opera asupra unui circuit C' compus din două părți, una fixă, cealaltă mobilă. Partea mobilă era, de exemplu, un fir mobil $\alpha\beta$ ale cărui extremități α și β puteau aluneca de-a lungul unui fir fix. Într-una din pozițiile firului mobil, extremitatea α se afla pe punctul A al firului fix și extremitatea β pe punctul B al firului fix. Curentul circula de la α la β, adică de la A la B de-a lungul firului mobil, și revenea apoi de la B la A urmînd firul fix. *Acest curent era deci închis.*

Într-o a doua poziție, firul mobil lunecînd, extremitatea α se afla pe un alt punct, A', al

firului fix și extremitatea β pe un alt punct, B', al firului fix. Curentul circula atunci de la α, la β, adică de la A' la B' de-a lungul firului mobil, și revenea apoi de la B' la B, apoi de la B la A, apoi, în fine, de la A la A', urmînd totdeauna firul fix. Curentul era deci tot închis.

Dacă un circuit asemănător este supus acțiunii unui curent închis C, partea mobilă se va deplasa ca și cum ea ar suferi acțiunea unei forțe. Ampère *admite* că forța la care pare să fie supusă această parte mobilă AB, reprezentînd acțiunea lui C asupra porțiunii $\alpha\beta$ din curent, este aceeași ca și cînd $\alpha\beta$ ar fi parcursă de un curent deschis care s-ar opri în α și în β, în loc de a fi parcursă de un curent închis care, după ce a ajuns în β, revine în α prin partea fixă a circuitului.

Această ipoteză poate părea destul de firească și Ampère o face fără să bage de seamă; totuși, *ea nu se impune*, întrucît, după cum vom vedea mai tîrziu, Helmholtz a respins-o. Oricum, ea i-a permis lui Ampère, deși el nu a putut niciodată să realizeze un curent deschis, să enunțe legi ale acțiunii unui curent închis asupra unui curent deschis sau chiar asupra unui element de curent.

Legile rămîn simple:

1. Forța care acționează asupra unui element de curent este aplicată acestui element; ea este normală la element și la forța magnetică și proporțională cu componenta forței magnetice care este normală la element.

2. Acțiunea unui solenoid închis asupra unui element de curent e nulă.

Dar nu mai există potențial electrodinamic, adică, atunci cînd un curent închis și un curent deschis, ale căror intensități au fost menținute constante, revin la pozițiile lor inițiale, lucrul mecanic total nu este nul.

3. **Rotații continue.** — Printre experiențele electrodinamice, cele mai curioase sînt acelea în care s-au putut realiza rotații continue și care sînt denumite uneori experiențe de *inducție unipolară*. Un magnet poate să se rotească în jurul axei sale; un curent parcurge mai întîi un fir fix, intră în magnet prin polul N, de exemplu, parcurge jumătate din magnet, iese din el printr-un contact glisant și reintră în firul fix.

Magnetul intră atunci în rotație continuă fără a putea să atingă vreodată o poziție de echilibru. Aceasta este experiența lui Faraday.

Cum este posibilă aceasta? Dacă am avea de-a face cu două circuite de formă invariabilă, unul fix C, altul C' mobil în jurul unei axe, acesta din urmă nu ar putea niciodată să capete o rotație continuă; într-adevăr, există un potențial electrodinamic; va exista, deci, în mod necesar, o poziție de echilibru, aceea în care acest potențial va fi maxim.

Rotațiile continue nu sînt deci posibile decît dacă circuitul C' se compune din două părți: una fixă, cealaltă mobilă în jurul unei axe, așa cum se întîmplă în experiența lui Faraday. Se cuvine să mai facem o distincție. Trecerea de la partea fixă la partea mobilă sau invers poate să se facă, fie printr-un contact simplu (același punct din partea mobilă rămînînd în mod constant în contact cu același punct din partea fixă), fie printr-un contact glisant (același punct din partea mobilă venind în mod succesiv în contact cu diverse puncte ale părții fixe).

Numai în cel de-al doilea caz poate exista rotație continuă. Iată ce se întîmplă atunci: sistemul tinde, într-adevăr, să ia o poziție de echilibru; dar, cînd ea urmează să fie atinsă, contactul glisant pune partea mobilă în comunicație cu un nou punct din partea fixă; ea schimbă conexiunile, schimbă, așadar, condițiile de echilibru, astfel încît poziția de echilibru, fugind,

pentru a spune astfel, din fața sistemului care caută să o ajungă, rotația poate să se continue în mod indefinit.

Ampère admite că acțiunea circuitului asupra părții mobile a lui C' este aceeași ca și cînd partea fixă a lui C' nu ar exista și ca și cînd, prin urmare, curentul care circulă în partea mobilă ar fi deschis.

El conchide, așadar, că acțiunea unui curent închis asupra unui curent deschis, sau invers, aceea a unui curent deschis asupra unui curent închis, poate da loc unei rotații continue.

Dar această concluzie depinde de ipoteza pe care am enunțat-o adineauri și care, așa cum am spus mai sus, nu este admisă de Helmholtz.

4. **Acțiunea reciprocă a doi curenți deschiși.** — În ceea ce privește acțiunea reciprocă a doi curenți deschiși și, în special, aceea a două elemente de curent, lipsește orice experiență. Ampère a recurs la ipoteză. El presupune: 1. că acțiunea dintre două elemente se reduce la o forță dirijată după dreapta care le unește; 2. că acțiunea a doi curenți închiși este rezultanta acțiunilor reciproce ale diverselor lor elemente, acțiuni care sînt, de altfel, aceleași ca și cînd aceste elemente ar fi izolate.

Ceea ce e de remarcat este faptul că și aici Ampère face aceste două ipoteze fără să știe.

Oricum, aceste două ipoteze, împreună cu experiențele asupra curenților închiși, sînt suficiente pentru a determina complet legea acțiunii reciproce a două elemente.

Dar atunci, cea mai mare parte dintre legile simple pe care le-am întîlnit în cazul curenților închiși nu mai sînt adevărate.

Mai întîi, nu există potențial electrodinamic; nu exista, de altfel, după cum am văzut, nici în cazul unui curent închis care acționează asupra unui curent deschis.

Apoi, la drept vorbind, nu mai există forță magnetică.

Și, într-adevăr, noi am dat mai sus trei definiții diferite ale acestei forțe.

1. Prin acțiunea suferită de un pol magnetic;

2. Prin cuplul director care orientează acul magnetizat;

3. Prin acțiunea suferită de un element de curent.

Or, în cazul care ne preocupă acum, nu numai că aceste trei definiții nu mai concordă, dar fiecare dintre ele este lipsită de sens. Într-adevăr:

1. Un pol magnetic nu mai este supus pur și simplu unei forțe unice aplicate lui. Am văzut că forța datorată acțiunii unui element de curent asupra unui pol nu este aplicată polului, ci elementului; ea poate fi, de altfel, înlocuită printr-o forță aplicată polului și printr-un cuplu;

2. Cuplul care acționează asupra acului magnetizat nu mai este un simplu cuplu director; căci momentul său în raport cu axa acului nu este nul. El se descompune într-un cuplu director propriu-zis și un cuplu suplimentar, care tinde să producă rotația continuă despre care am vorbit mai sus;

3. În sfîrșit, forța suferită de un element de curent nu este normală la acest element.

Cu alte cuvinte, *unitatea forței magnetice a dispărut.*

Iată în ce constă această unitate. Două sisteme care exercită aceeași acțiune asupra unui pol magnetic vor exercita de asemenea aceeași acțiune asupra unui ac magnetizat extrem de mic, sau asupra unui element de curent, plasate în același punct al spațiului în care se afla acest pol.

Ei bine, acest fapt este adevărat dacă aceste două sisteme nu conțin decît curenți închiși;

acest fapt nu ar mai fi adevărat, după Ampère, dacă aceste sisteme ar conține curenți deschiși.

Este suficient să remarcăm, de exemplu, că, dacă un pol magnetic este plasat în A și un element în B, direcția elementului fiind pe prelungirea dreptei AB, acest element, care nu va exercita nici o acțiune asupra acestui pol, va exercita una, din contră, fie asupra unui ac magnetizat plasat în punctul A, fie asupra unui element de curent plasat în punctul A.

5. **Inducția.** — Se știe că descoperirea inducției electrodinamice a urmat rapid nemuritoarelor lucrări ale lui Ampère.

Atît timp cît nu este vorba decît de curenți închiși, nu există nici o dificultate în această privință, iar Helmholtz a remarcat chiar că principiul conservării energiei putea să fie suficient pentru a deduce legile inducției din legile electrodinamice ale lui Ampère. Cu o condiție însă — și Bertrand a arătat bine acest lucru — aceea de a se admite în plus un anumit număr de ipoteze.

Același principiu permite această deducție și în cazul curenților deschiși, deși, bineînțeles, rezultatul nu poate fi supus controlului experienței, pentru că nu se pot realiza asemenea curenți.

Dacă vrem să aplicăm acest mod de analiză la teoria lui Ampère asupra curenților deschiși, se ajunge la rezultate în măsură să ne surprindă.

Mai întîi, inducția nu se poate deduce din variația cîmpului magnetic după formula binecunoscută a savanților și a practicienilor, căci, într-adevăr, după cum am spus, nu mai există, la drept vorbind, cîmp magnetic.

Dar ceva mai mult! Dacă un circuit C este supus inducției unui sistem voltaic variabil S; dacă acest sistem S se deplasează și se deformează într-un mod oarecare, dacă intensitatea curenților acestui sistem variază după o lege oarecare, dar, după aceste variații, sistemul revine în final

la situația sa inițială, — pare natural să se presupună că forța electromotoare *medie* indusă în circuitul *C* este nulă.

Acest lucru e adevărat dacă circuitul *C* este închis și dacă sistemul *S* nu conține decît curenți închiși. Dar nu ar mai fi adevărat dacă se acceptă teoria lui Ampère, de îndată ce ar exista curenți deschiși. Astfel încît, nu numai că inducția nu va mai fi variația fluxului de forță magnetică în nici unul dintre sensurile obișnuite ale acestui termen, dar ea nu va putea fi reprezentată prin variația a indiferent ce.

II. — **Teoria lui Helmholtz.** — Am insistat asupra consecințelor teoriei lui Ampère și ale modului său de a înțelege acțiunea curenților deschiși.

Este greu să tăgăduiești caracterul paradoxal și artificial al propozițiilor la care sîntem astfel conduși; sîntem obligați să gîndim că „aici nu trebuie să fie așa".

Se înțelege deci că Helmholtz a fost determinat să caute altceva.

Helmholtz respinge ipoteza fundamentală a lui Ampère, anume că acțiunea dintre două elemente de curent se reduce la o forță dirijată după dreapta care le unește.

El admite că un element de curent nu este supus unei forțe unice, ci unei forțe și unui cuplu. Este ceea ce a dat loc celebrei polemici dintre Bertrand și Helmholtz.

Helmholtz înlocuiește ipoteza lui Ampère prin următoarea: două elemente de curent admit totdeauna un potențial electrodinamic, care depinde numai de poziția și de orientarea lor, iar lucrul mecanic al forțelor pe care elementele le exercită unul asupra celuilalt este egal cu variația acestui potențial. În acest fel, Helmholtz nu poate, mai mult decît Ampère, să se lipsească de ipoteză; dar, cel puțin, el nu o face fără a enunța în mod explicit acest fapt.

În cazul curenților închiși, singurul accesibil experienței, cele două teorii concordă: în toate celelalte cazuri, ele diferă.

Mai întîi, contrar celor pe care le presupunea Ampère, forța la care pare supusă porțiunea mobilă dintr-un curent închis nu este aceeași pe care această porțiune ar suferi-o dacă ea ar fi izolată și ar constitui un curent deschis.

Să revenim la circuitul C', despre care am vorbit mai sus, și care era format dintr-un fir mobil $\alpha\beta$ ce aluneca pe un fir fix; în singura experiență realizabilă, porțiunea mobilă $\alpha\beta$ nu este izolată, ci face parte dintr-un circuit închis. Cînd ea vine din AB în $A'B'$, potențialul electrodinamic total variază din două motive: 1. el suferă o primă creștere, deoarece potențialul lui $A'B'$ în raport cu circuitul C nu este același ca potențialul lui AB; 2. el suferă o a doua creștere, pentru că trebuie să-l mărim cu potențialele elementeleor AA' și $B'B$ în raport cu C.

Această *dublă* creștere este cea care reprezintă lucrul mecanic al forței la care pare supusă porțiunea AB.

Dacă, din contră, $\alpha\beta$ ar fi izolat, potențialul nu ar suferi decît prima creștere, și numai această primă creștere ar măsura lucrul mecanic al forței care acționează asupra lui AB.

În al doilea rînd, nu poate să existe rotație continuă fără contact glisant; și, într-adevăr, avem aici, după cum am văzut în legătură cu curenții închiși, o consecință imediată a existenței unui potențial electrodinamic.

În experiența lui Faraday, dacă magnetul este fix și dacă partea din curent exterioară magnetului parcurge un fir mobil, această parte mobilă va putea suferi o rotație continuă. Dar aceasta nu înseamnă că dacă s-ar suprima contactele firului cu magnetul și s-ar face ca firul să fie parcurs de un curent *deschis*; firul ar mai lua o mișcare de rotație continuă.

Am spus adineauri, într-adevăr, că un element *izolat* nu suferă aceeași acțiune ca un element mobil care face parte dintr-un circuit închis.

Altă diferență: Acțiunea unui solenoid închis asupra unui curent închis este nulă după experiență și după cele două teorii; acțiunea sa asupra unui curent deschis ar fi nulă după Ampère; ea nu ar fi nulă după Helmohltz.

De unde o consecință importantă. Am dat mai sus trei definiții ale forței magnetice; a treia nu are aici nici un sens, pentru că un element de curent nu mai este supus unei forțe unice. Nici prima nu are vreun sens. Ce este, într-adevăr, un pol magnetic? Este extremitatea unui magnet liniar indefinit. Acest magnet poate fi înlocuit printr-un solenoid indefinit. Pentru ca definiția forței magnetice să aibă un sens, ar trebui ca acțiunea exercitată de un curent deschis asupra unui solenoid indefinit să nu depindă decît de poziția extremității acestui solenoid, adică acțiunea asupra unui solenoid închis să fie nulă. Or, am văzut mai sus că acest fapt nu e adevărat.

În schimb, nimic nu ne împiedică să adoptăm cea de-a doua definiție, aceea care este bazată pe măsurarea cuplului director care tinde să orienteze un ac magnetizat.

Dar, dacă este adoptată, nici efectele de inducție, nici efectele electrodinamice nu vor depinde numai de distribuția liniilor de forță ale cîmpului magnetic.

III. — **Dificultăți ridicate de aceste teorii.** — Teoria lui Helmholtz constituie un progres față de cea a lui Ampère; însă trebuie depășite toate dificultățile rămase. Într-una, ca și în cealaltă, termenul cîmp magnetic nu are sens, sau, dacă i se dă unul printr-o convenție mai mult sau mai puțin artificială, legile obișnuite, atît de familiare tuturor electricienilor, nu se mai aplică; astfel, forța electromotoare indusă într-un

fir nu mai este măsurată prin numărul liniilor de forță întîlnite de acest fir.

Dar aversiunea noastră nu provine numai de la faptul că este greu să renunți la deprinderi, bine înrădăcinate, de limbaj și de gîndire. Există ceva în plus. Dacă noi nu credem în acțiunile la distanță, trebuie să explicăm fenomenele electrodinamice printr-o modificare a mediului. Tocmai această modificare este ceea ce se numește cîmp magnetic, și atunci efectele electrodinamice nu ar trebui să depindă decît de acest cîmp.

Toate aceste dificultăți provin din ipoteza curenților deschiși.

IV. — **Teoria lui Maxwell.** — Acestea erau dificultățile ridicate de teoriile dominante cînd a apărut Maxwell, care, dintr-o trăsătură de condei, le-a făcut pe toate să dispară. După el, nu există decît curenți închiși.

Maxwell admite, că, dacă, într-un dielectric, cîmpul electric prezintă variații, acest dielectric devine sediul unui fenomen particular, care acționează asupra galvanometrului ca un curent și pe care el îl denumește *curent de deplasare*.

Dacă, atunci, doi conductori purtînd sarcini contrarii sînt puși în comunicație printr-un fir, în acest fir se manifestă, în timpul descărcării, un curent de conducție deschis; dar se produc, în același timp, în dielectricul ambiant, curenți de deplasare care închid acest curent de conducție.

Se știe că teoria lui Maxwell conduce la explicarea fenomenelor optice, care ar fi datorate unor oscilații electrice extrem de rapide.

În acea epocă, o asemenea concepție nu era decît o ipoteză îndrăzneață, care nu se putea sprijini pe nici o experiență.

După douăzeci de ani, ideile lui Maxwell au primit confirmarea experienței. Hertz a reușit să producă sisteme de oscilații electrice care reproduc toate proprietățile luminii și nu diferă de aceasta

decît prin lungimea de undă, adică așa cum violetul diferă de roșu. El a făcut, pentru a spune astfel, sinteza luminii. După cum știm cu toții, de aici a rezultat telegrafia fără fir.

S-ar putea spune că Hertz nu a demonstrat direct ideea fundamentală a lui Maxwell, anume acțiunea curentului de deplasare asupra galvanometrului. Aceasta este adevărat într-un sens, și ceea ce a arătat el direct, în esență, este faptul că inducția electromagnetică nu se propagă instantaneu, așa cum se credea, ci cu viteza luminii.

Numai că, a presupune că nu există curent de deplasare și că inducția se propagă cu viteza luminii; sau, a presupune că curenții de deplasare produc efecte de inducție și că inducția se propagă instantaneu — *înseamnă același lucru.*

Ceea ce nu se vede la prima abordare, dar ceea ce se demonstrează printr-o analiză pe care nici nu mă pot gîndi să o rezum aici.

V. — **Experiențele lui Rowland.** — Dar, așa cum am spus mai sus, există două feluri de curenți de conducție deschiși: există, mai întîi, curenții de descărcare ai unui condensator sau ai unui conductor oarecare.

Există, de asemenea, cazurile în care sarcini electrice descriu un contur închis, deplasîndu-se prin conducție într-o parte a circuitului și prin convecție în cealaltă parte.

Pentru curenții deschiși de primul gen, chestiunea putea fi privită ca rezolvată: ei erau închiși de către curenții de deplasare.

Pentru curenții deschiși de genul al doilea, soluția părea și mai simplă; dacă curentul era închis, se părea că acesta nu putea fi închis decît de către însuși curentul de convecție. Pentru aceasta, era suficient să se admită că un „curent de convecție", adică un conductor încărcat în mișcare, putea acționa asupra galvanometrului.

Însă confirmarea experimentală lipsea. Părea greu, într-adevăr, să se obțină o intensitate sufi-

ciență, chiar mărind pe cît posibil sarcina și viteza conductorilor.

Primul care a învins aceste dificultăți a fost Rowland, un experimentator extrem de abil. Un disc primea o sarcină electrostatică puternică și o foarte mare viteză de rotație. Un sistem magnetic astatic, plasat alături de disc, suferea deviații.

Experiența a fost efectuată de două ori de către Rowland: o dată la Berlin, o dată la Baltimore; ea a fost reluată apoi de către Himstedt. Acești fizicieni au crezut chiar că sînt în măsură să anunțe că au efectuat măsurători cantitative.

Legea lui Rowland a fost admisă pe deplin de către toți fizicienii.

Totul, de altfel, părea să o confirme. Scînteia produce cu siguranță un efect magnetic; or, nu pare oare verosimil faptul că descărcarea prin scînteie este datorată unor particule smulse de la unul din electrozi și transportate pe celălalt electrod cu sarcina lor? Spectrul însuși al scînteii, unde se recunosc liniile metalului electrodului, nu constituie oare o dovadă în acest sens? Scînteia ar fi atunci un veritabil curent de convecție.

Pe de altă parte, se admite de asemenea că, într-un electrolit, electricitatea este transportată de către ionii aflați în mișcare. Curentul într-un electrolit ar fi, deci, de asemenea un curent de convecție; or, el acționează asupra acului magnetizat.

La fel în ceea ce privește razele catodice; Crookes atribuie aceste raze efectului unei materii foarte subtile, încărcată cu electricitate negativă și animată de o viteză foarte mare; el le consideră, în alți termeni, ca niște curenți de convecție și modul său de a vedea, un moment contestat, este astăzi adoptat pretutindeni. Or, aceste raze catodice sînt deviate de către magnet. În virtutea principiului acțiunii și reacției, ele trebuie, la rîndul lor, să devieze acul magnetizat.

Este adevărat, Hertz a crezut că a demonstrat că razele catodice nu transportă electricitate negativă și că ele nu acționează asupra acului magnetizat. Dar Hertz se înșela; mai întîi, Perrin a putut să colecteze electricitatea transportată de aceste raze, a cărei existență Hertz o nega; savantul german părea să fi fost înșelat de efectele datorate acțiunii razelor X, care nu erau încă descoperite. Apoi, recent, a fost pusă în evidență acțiunea razelor catodice asupra acului magnetizat, recunoscîndu-se cauza erorii comise de către Hertz.

Astfel, toate aceste fenomene considerate drept curenți de convecție, scîntei, curenți electrolitici, raze catodice, acționează în același mod asupra galvanometrului și conform legii lui Rowland.

VI. — **Teoria lui Lorentz.** — Curînd s-a mers mai departe. După teoria lui Lorentz, curenții de conducție înșiși ar fi veritabili curenți de convecție: electricitatea ar rămîne indisolubil legată de anumite particule materiale numite *electroni;* circulația acestor electroni prin corpuri ar fi aceea care ar produce curenții voltaici, și ceea ce ar deosebi conductorii de izolanți ar fi faptul că unii s-ar lăsa traversați de acești electroni, pe cînd ceilalți le-ar opri mișcările.

Teoria lui Lorentz este foarte seducătoare, ca dă o explicație foarte simplă anumitor fenomene pe care vechile teorii, chiar aceea a lui Maxwell în forma sa primitivă, nu puteau să le explice într-un mod satisfăcător, de exemplu, aberația luminii, antrenarea parțială a undelor luminoase, polarizarea magnetică, experiența lui Zeeman.

Cîteva obiecții rămîneau însă. Fenomenele al căror sediu este un sistem păreau că trebuie să depindă de viteza absolută de translație a centrului de gravitație al acestui sistem, ceea ce este contrar ideii pe care ne-o facem despre relativitatea spațiului. În urma susținerii publice a lui Crémieu, Lippmann a prezentat această obiecție

într-o formă surprinzătoare: Să presupunem doi conductori încărcați, animați de o aceeași viteză de translație. Ei sînt în repaus relativ; totuși, fiecare dintre ei echivalînd cu un curent de convecție, ei trebuie să se atragă, și s-ar putea, măsurînd această atracție, să se măsoare viteza lor absolută.

Nu, răspundeau partizanii lui Lorentz; ce s-ar măsura astfel nu este viteza lor absolută, ci viteza lor relativă *în raport cu eterul*, astfel încît principiul relativității este salvat. De atunci Lorentz a găsit un răspuns mai subtil, dar mult mai satisfăcător.

Indiferent de aceste ultime obiecții, edificiul electrodinamicii, cel puțin în liniile sale mari, pare definitiv construit; totul se prezintă sub aspectul cel mai satisfăcător; teoriile lui Ampère și Helmholtz, elaborate pentru curenții deschiși, care nu mai există, par să mai aibă doar un interes pur istoric.

Istoria acestor căutări este totuși instructivă; ea ne arată capcanele la care este expus savantul și speranțele sale de a scăpa din aceste capcane.

Capitolul XIV

Sfîrșitul materiei [7]

Una dintre descoperirile cele mai uimitoare pe care le-au anunțat fizicienii în ultimii ani este aceea că materia nu există. Să ne grăbim să spunem că această descoperire nu este încă definitivă. Atributul esențial al materiei este masa sa, inerția sa. Masa este ceea ce rămîne constant pretutindeni și totdeauna, ceea ce subzistă cînd o transformare chimică a modificat toate calitățile sen-

[7] A se vedea *Evoluția materiei*, de Gustave Le Bon.

sibile ale materici, părînd a fi făcut din ea un alt corp. Dacă, așadar, s-ar veni să se demonstreze că masa, inerția materiei nu îi aparține acesteia în realitate, că ea este o găteală de împrumut cu care materia se împodobește, că această masă, constanta prin excelență, este susceptibilă de degradare, s-ar putea spune, într-adevăr, că materia nu există. Or, tocmai aceasta se anunță.

Vitezele pe care am putut să le observăm pînă acum erau foarte mici, întrucît corpurile cerești, care lasă mult în urma lor toate automobilele noastre, ating de-abia 60 sau 100 km pe secundă; lumina, este adevărat, merge de 3000 de ori mai repede, dar aceasta nu este o materie care se deplasează, este o perturbație care avansează printr-o substanță relativ imobilă, ca un val la suprafața oceanului. Toate observațiile făcute cu aceste viteze mici arătau constanța masei, și nimeni nu se întrebase dacă ar mai fi la fel și în cazul vitezelor mai mari.

Recordul lui Mercur, planeta cea mai rapidă, a fost bătut de infiniții mici: mă refer la corpusculii ale căror mișcări produc razele catodice și razele radiului. Se știe că aceste radiații sînt datorate unui veritabil bombardament molecular. Proiectilele lansate în acest bombardament sînt încărcate cu electricitate negativă, și ne putem încredința de acest fapt colectînd această electricitate într-un cilindru Faraday. Din cauza sarcinii lor, ei sînt deviați atît de un cîmp magnetic, cît și de un cîmp electric, iar comparația acestor deviații ne poate face să cunoaștem viteza lor și raportul dintre sarcina și masa lor.

Or, aceste măsurători ne-au arătat, pe de o parte, că viteza lor este enormă, că ea este a zecea sau a treia parte din cea a luminii, de o mie de ori mai mare decît cea a planetelor, și, pe de altă parte, că sarcina lor este considerabilă în raport cu masa lor. Fiecare corpuscul în mișcare reprezintă deci un curent electric notabil. Dar noi

știm, curenții electrici prezintă un fel de inerție specială numită *self-induction*. Un curent, odată stabilit, tinde să se mențină și, din această cauză, atunci cînd întrerupem un curent, tăind conductorul pe care îl traversează, se vede țișnind o scînteie la punctul de întrerupere. Astfel curentul tinde să-și conserve intensitatea la fel cum un corp în mișcare tinde să-și conserve viteza. Așadar, corpusculul nostru catodic va rezista cauzelor care i-ar putea modifica viteza, din două rațiuni: mai întîi datorită inerției sale propriu-zise, și apoi datorită acelei *self-induction*, întrucît orice modificare a vitezei ar fi în același timp o modificare a curentului corespunzător. Corpusculul — *electronul*, cum se spune — va avea deci două inerții: inerție mecanică și inerție electromagnetică.

Abraham și Kaufmann, unul calculator, celălalt experimentator, și-au unit eforturile pentru a determina partea uneia și partea celeilalte. Ei au fost obligați, în acest scop, să admită o ipoteză; au considerat că toți electronii negativi sînt identici, că ei poartă aceeași sarcină, esențial constantă, că deosebirile care se constată între ei provin numai de la vitezele diferite cu care sînt ei animați. Cînd viteza variază, masa reală, masa mecanică rămîne constantă, aceasta fiind, pentru a spune astfel, însăși definiția sa; dar inerția electromagnetică, care contribuie la formarea masei aparente, crește cu viteza după o anumită lege. Trebuie, așadar, să existe aici o relație între viteză și raportul dintre masă și sarcină, cantități care pot fi calculate, așa cum am spus, observînd deviațiile razelor sub acțiunea unui magnet sau a unui cîmp electric; studiul acestei relații permite să se determine partea celor două inerții. Rezultatul este cu totul surprinzător: *masa reală este nulă*. Este adevărat că trebuie să se admită ipoteza făcută la început, iar concordanța dintre curba teoretică și curba experimentală este destul

de mare pentru a face această ipoteză foarte verosimilă.

Astfel, acești electroni negativi nu au masă propriu-zisă; dacă par dotați cu inerție, aceasta se datorește faptului că ei nu ar putea să-și schimbe viteza fără a afecta eterul. Inerția lor aparentă nu este decît un împrumut; ea nu le aparține, ea este a eterului. Dar acești electroni negativi nu constituie întreaga materie; s-ar putea admite, așadar, că, în afară de ei, există o materie adevărată dotată cu o inerție proprie. Există anumite radiații — ca razele-canal ale lui Goldstein, razele α ale radiului — care sînt datorate, de asemenea, unei ploi de proiectile, dar de proiectile încărcate pozitiv; acești electroni pozitivi sînt și ei lipsiți de masă? Este imposibil să o spunem, pentru că ei sînt mult mai grei și mult mai puțin rapizi decît electronii negativi. Și atunci rămîn admisibile două ipoteze: sau electronii sînt mai grei, pentru că, în afară de inerția lor electromagnetică împrumutată, ei au o inerție mecanică proprie, și atunci ei sînt aceia care constituie adevărata materie; sau ei sînt fără masă, ca și ceilalți și, dacă ni se par mai grei, aceasta se datorește faptului că ei sînt mai mici. Spun, într-adevăr, mai mici, deși acest lucru poate părea paradoxal; căci în această concepție corpusculul nu ar fi decît un vid în eter, singurul real, singurul dotat cu inerție.

Pînă aici materia nu este prea compromisă; putem să adoptăm încă prima ipoteză sau chiar să credem că, în afară de electronii pozitivi și negativi, există și atomi neutri. Recentele cercetări ale lui Lorentz ne răpesc însă acest ultim mijloc de scăpare. Noi sîntem antrenați în mișcarea Terrei, care este foarte rapidă; oare fenomenele optice și electrice nu sînt modificate de această translație? S-a crezut aceasta mult timp, dar s-a presupus că observațiile ar descoperi diferențe după orientarea aparatelor în raport cu mișcarea

Terrei. Nu a fost adevărat, măsurătorile cele mai fine nearătînd nimic asemănător. Şi astfel experienţele justificau o aversiune comună tuturor fizicienilor; dacă s-ar fi găsit într-adevăr ceva, s-ar fi putut cunoaşte nu numai mişcarea relativă a Terrei în raport cu Soarele, dar şi mişcarea sa absolută în eter. Or, multor persoane le vine greu să creadă că dintr-o experienţă poate să rezulte altceva decît o mişcare relativă; ele ar accepta cu mai multă bucurie să creadă că materia nu are masă.

Lumea nu a fost, aşadar, prea mirată de rezultatele negative obţinute; ele erau contrarii teoriilor profesate, dar măguleau un instinct profund, anterior tuturor acestor teorii. Totuşi, trebuiau modificate aceste teorii în consecinţă, pentru a le pune în armonie cu faptele. Ceea ce a făcut Fitzgerald, printr-o ipoteză surprinzătoare: el a admis că toate corpurile suferă o contracţie de aproximativ a suta-milionime în direcţia mişcării Terrei. O sferă perfectă devine astfel un elipsoid şi, dacă o facem să se rotească, ea se deformează astfel încît axa mică a elipsoidului rămîne mereu paralelă cu viteza Terrei. Cum instrumentele de măsură suferă aceleaşi deformări ca şi obiectele de măsurat, nu se bagă de seamă nimic, afară numai de cazul în care nu intervine ideea de a se determina timpul care îi trebuie luminii pentru a parcurge lungimea obiectului.

Această ipoteză explică faptele observate. Dar nu este destul aceasta; într-o zi se vor face observaţii şi mai precise; rezultatele vor fi de data aceasta pozitive; ne vor pune ele în situaţia de a determina mişcarea absolută a Terrei? Lorentz nu s-a gîndit la aşa ceva; el crede că această determinare va fi totdeauna imposibilă; instinctul comun al tuturor fizicienilor, insuccesele de pînă acum îi garantează suficient acest lucru, Să considerăm, deci, această imposibilitate ca o lege generală a naturii; s-o admitem ca pe un

postulat. Care îi vor fi consecințele? Cercetîndu-le, Lorentz a găsit că toți atomii, toți electronii pozitivi sau negativi trebuie să aibă o inerție variabilă cu viteza, și exact după aceleași legi. Astfel, orice atom material ar fi format din electroni pozitivi, mici și grei, și din electroni negativi, mari și ușori, și dacă materia sensibilă nu ne apare electrizată, aceasta se datorește faptului că cele două feluri de electroni sînt aproape în număr egal. Atît unii, cît și ceilalți sînt lipsiți de masă și nu au decît o inerție de împrumut. În acest sistem nu există materie adevărată, nu mai există decît găuri în eter.

Pentru Langevin, materia ar fi eter lichefiat, care și-a pierdut proprietățile; cînd materia s-ar deplasa, nu ar fi această masă lichefiată care ar merge prin eter; ci lichefacția s-ar extinde din aproape în aproape la noi porțiuni din eter, în timp ce, înapoi, părțile mai întîi lichefiate și-ar relua starea lor primitivă. Materia mișcîndu-se nu și-ar conserva identitatea.

Acesta era stadiul în care se afla chestiunea acum cîtva timp; dar iată, Kaufmann anunță noi experiențe. Electronul negativ, a cărui viteză este enormă, ar trebui să sufere contracția lui Fitzgerald, și relația dintre viteză și masă ar fi astfel modificată; or, experiențele recente nu confirmă această previziune; totul s-ar prăbuși atunci, iar materia și-ar relua drepturile la existență. Dar experiențele sînt delicate și o concluzie definitivă ar fi astăzi prematură.

Cuprins

Cuvînt introductiv. Un mare gînditor — Henri Poincaré, de Acad. Octav Onicescu 5

ȘTIINȚĂ ȘI IPOTEZĂ

Introducere 22

PARTEA ÎNTÎI

Numărul și mărimea

Capitolul I — Despre natura raționamentului matematic 27
Capitolul II — Mărimea matematică și experiența 42

PARTEA A DOUA

Spațiul

Capitolul III — Geometriile neeuclidiene 57
Capitolul IV — Spațiul și Geometria 71
Capitolul V — Experiența și Geometria 89

PARTEA A TREIA

Forța

Capitolul VI — Mecanica clasică 103
Capitolul VII — Mișcarea relativă și mișcarea absolută 121
Capitolul VIII — Energia și Termodinamica 130

PARTEA A PATRA

Natura

Capitolul IX — Ipotezele în fizică 145
Capitolul X — Teoriile fizicii moderne 161
Capitolul XI — Calculul probabilităților 179
Capitolul XII — Optica și electricitatea 203
Capitolul XIII — Electrodinamica 214
Capitolul XIV — Sfîrșitul materiei 230

Redactor DINU GRAMA
Tehnoredactor : ANGELA ILOVAN

Coli de tipar : 10
Bun de tipar 3.03.1986.

Tiparul executat sub comanda
nr. 738 la
Întreprinderea Poligrafică
„13 Decembrie 1918",
str. Grigore Alexandrescu nr. 89-97
București,
Republica Socialistă România

În colecția „Enciclopedia gîndirii" apar lucrări de mică întindere, unități sau fragmente din opera marilor filosofi, a oamenilor de cultură ori a oamenilor de știință de pretutindeni și din toate timpurile, lucrări mai puțin cunoscute sau care nu s-au impus atenției în ciuda valorii lor. Concepută istoric și sistematic totodată, colecția oferă în egală măsură cititorului cunoștințe și atitudini culturale foarte diferite, dar toate dezvoltînd un autentic umanism.